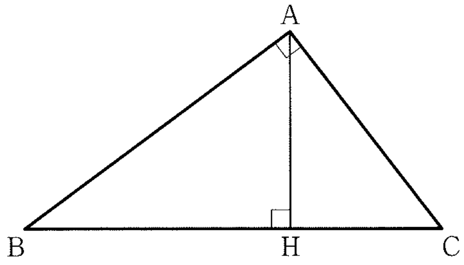
4－7. 平面図形　相似の証明　複合問題ほか　2010年度出題

【問1】

　図のように，正三角形ABCの辺BC上に点Dをとり，ADを1辺とする正三角形ADEをつくる。また，辺DEと辺ACの交点をFとする。次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県　後期　2010年度）

(1)　△ABDと△ACEが合同になることを次のように証明した。



　$\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{え}}$ にあてはまる式やことばや角を入れなさい。

〔証明〕
△ABDと△ACEで
△ABCは正三角形だから
$\boxed{\quad\text{あ}\quad}$ …①
同様に，△ADEは正三角形だから
AD＝AE　…②
また，△ABC，△ADEは正三角形だから
$\boxed{\quad\text{い}\quad}$ ＝60°
∠BAD　＝60°－ $\boxed{\quad\text{う}\quad}$ …③
∠CAE　＝60°－ $\boxed{\quad\text{う}\quad}$ …④
③，④から
∠BAD＝∠CAE　…⑤
①，②，⑤から，$\boxed{\quad\text{え}\quad}$ が等しいので
△ABD≡△ACE

(2)　AB＝6 cm，DC＝2 cmのとき，CFの長さを求めなさい。

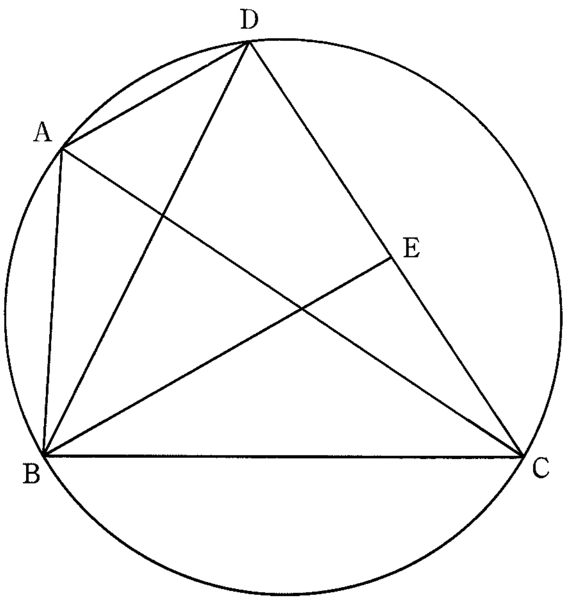
解答欄

(1)	あ	
	い	
	う	
	え	
(2)		cm

【問2】

図のように，4点A，B，C，Dが，この順序で円の周上にあり，AB＜CDとなっています。また，Bを通り線分ADに平行な直線をひき，線分CDとの交点をEとします。このとき，△ABC∽△DEBであることを証明しなさい。

（岩手県　2010年度）



解答欄

〔証明〕

【問3】

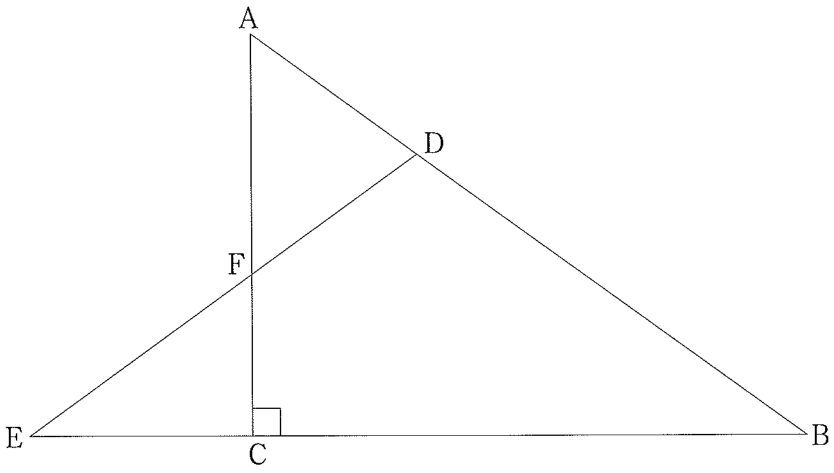
図のような，$\angle ACB=90°$ の直角三角形ABCがあります。AC＝6 cm，BC＝8 cmとし，辺AB上に点Dを，AD＝3 cmとなるようにとります。また，直線BC上に，DB＝DEとなる点Eを，点Bと一致しないようにとり，辺ACと線分DEとの交点をFとします。あとの(1)～(4)の問いに答えなさい。

（宮城県　2010年度）

(1)　辺ABの長さを求めなさい。

(2)　$\triangle ABC \backsim \triangle FEC$　であることを証明しなさい。

(3)　線分EFの長さを求めなさい。



(4)　点Cと点Dを結ぶ線分をひきます。△CDFの面積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	〔証明〕
(3)	cm
(4)	cm^2

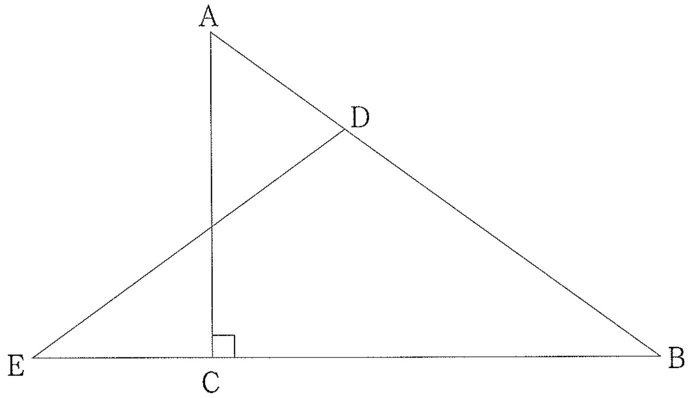
【問4】

図1のような，AB:BC＝5:4，∠ACB＝90° の直角三角形ABCがあり，辺AB上に点Dをとります。また，直線BC上に，DB＝DEとなる点Eをとります。ただし，点D，Eは，どちらも点Bと一致しないようにとります。あとの(1)，(2)の問いに答えなさい。

（宮城県　2010年度）

(1)　線分BDと線分BEの長さの比を求めなさい。

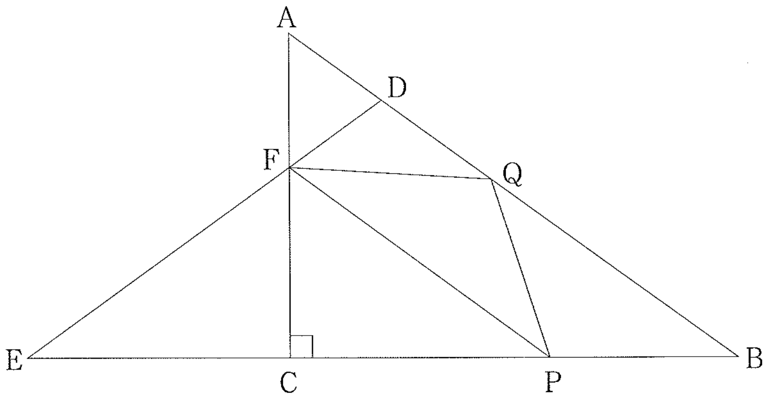
図1



(2)　図2は，図1において，AD:DB＝1:4とし，辺ACと線分DEとの交点をFとしたものです。また，辺BC上に点Pを，点Bと一致しないようにとり，辺AB上に点Qを，∠FPQ＝∠ABCとなるようにとり，△FPQをつくります。

あとの①～③の問いに答えなさい。

図2

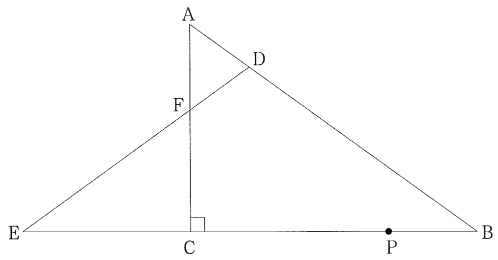


①　点Pが解答用紙の図の位置にあるとき，点Qを，△ABCと合同な三角形を作図することにより求めなさい。作図は，解答用紙の図に行い，点Qの位置を示す文字Qも書きなさい。なお，作図に用いた線は消さずに残しなさい。

②　△FEP∽△PBQ　であることを証明しなさい。

③　AB＝10 cmとします。PQ＝QFとなるとき，線分BPの長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">BD ： BE＝ ：</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>①</td><td>〔図〕

</td></tr>
<tr><td>②</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>③</td><td>cm</td></tr>
</table>

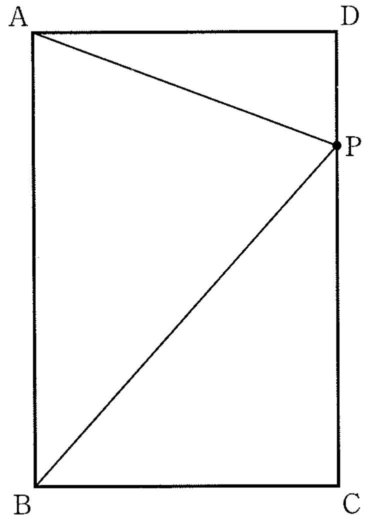
【問5】

図1で，四角形ABCDは，AB＞ADの長方形である。点Pは辺CD上にある点で，頂点C，頂点Dのいずれにも一致しない。頂点Aと点P，頂点Bと点Pをそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

（東京都　2010年度）

問1　図1において，AB＝BP，△BPAの内角である∠BAPの大きさをa°とするとき，△PBCの内角である∠PBCの大きさをaを用いた式で表せ。

図1

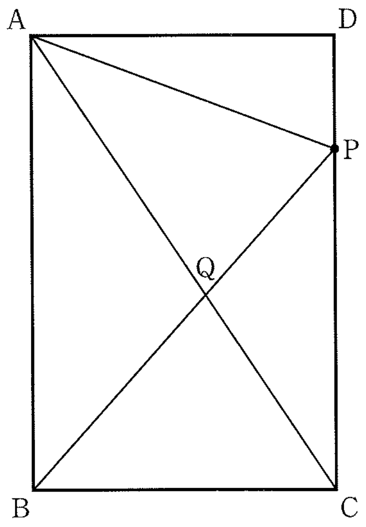


問2　右の図2は，図1において，頂点Aと頂点Cを結び，線分BPとの交点をQとした場合を表している。次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△ABQ∽△CPQ　であることを証明せよ。

(2)　図2において，頂点Cを通り線分APに平行な直線を引き，線分BPとの交点をRとした場合を考える。CP：PD＝2：1のとき，線分QRの長さは，線分BPの長さの何分のいくつか。

図2



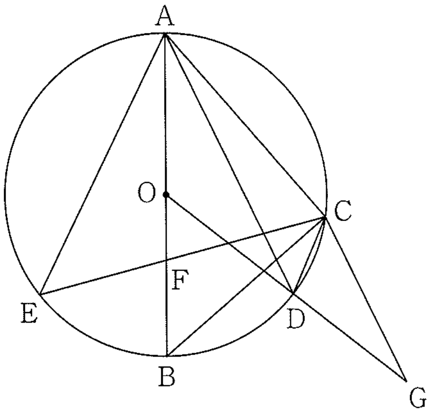
解答欄

問1	（　　　　　　　　）度	
問2	(1)	〔証明〕 △ABQと△CPQにおいて， △ABQ∽△CPQ
	(2)	

【問6】

図のように，線分ABを直径とする円Oの周上に，2点A，Bとは異なる点CをAC＞BCとなるようにとり，点Aをふくまない$\overset{\frown}{BC}$上に2点B，Cとは異なる点Dをとる。また，点Cをふくまない$\overset{\frown}{AB}$上に点Eを∠BAD＝∠BAEとなるようにとり，線分ABと線分CEとの交点をFとする。さらに，線分ODの延長上に点GをAD // CGとなるようにとる。このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2010年度）



問1　三角形AEFと三角形GCDが相似であることを次のように証明した。空欄にあてはまるものとして，$\boxed{\text{(a)}}$ には最も適する弧を記号⌒を用いて書き，$\boxed{\text{(b)}}$ には最も適する角を記号∠を用いて書き，$\boxed{\text{(あ)}}$ ～ $\boxed{\text{(う)}}$ には【選択群】から最も適するものをそれぞれ1つずつ選び，その番号を書きなさい。

〔証明〕

△AEFと△GCDにおいて，
まず，$\boxed{\text{(a)}}$ に対する円周角は等しいから，
∠AEC＝∠ADC
よって，∠AEF＝∠ADC…①
また，$\boxed{\text{(あ)}}$ から，
∠ADC＝∠GCD…②
①，②より，∠AEF＝∠GCD…③
次に，仮定より，
∠BAE＝∠BAD
よって，∠EAF＝∠OAD…④
また，△OADはOA＝ODの二等辺三角形だから，
∠OAD＝ $\boxed{\text{(b)}}$ …⑤
さらに，$\boxed{\text{(い)}}$ から，
∠ODA＝∠OGC…⑥
④，⑤，⑥より，∠EAF＝∠OGC
よって，∠EAF＝∠CGD…⑦
③，⑦より，$\boxed{\text{(う)}}$ から，
△AEF∽△GCD

【選択群】

1　対頂角は等しい
2　平行線の同位角は等しい
3　平行線の錯角は等しい
4　3組の辺の比が等しい
5　2組の辺の比が等しく，その間の角が等しい
6　2組の角がそれぞれ等しい

問2　∠BAC＝41°，∠BCD＝26°のとき，∠AFEの大きさを求めなさい。

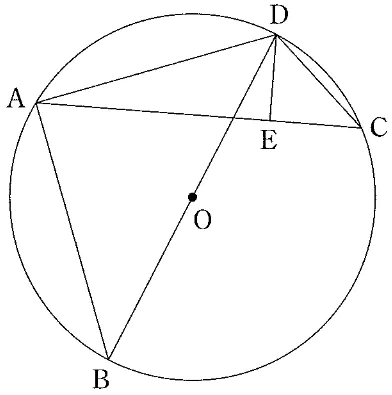
解答欄

<table>
<tr><td rowspan="5">問1</td><td>(a)</td><td></td></tr>
<tr><td>(あ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td></td></tr>
<tr><td>(い)</td><td></td></tr>
<tr><td>(う)</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">∠AFE＝　　　　　　　°</td></tr>
</table>

【問7】

図のように，半径7 cmの円Oの周上に4つの点A，B，C，Dがある。BDは円Oの直径，AB＝10 cm，CD＝4 cmである。また，線分AC上に，∠BDC＝∠ADEとなる点Eをとる。このとき，△ABD∽△ECDであることを用いて，下の解答のように，ア，イ，ウの順でDEの長さを求めた。次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2010年度）



問1 $\boxed{ア}$ には，△ABD∽△ECDであることの証明が入る。それを完成させなさい。

問2 $\boxed{イ}$ の（　　）にあてはまる角の大きさを書きなさい。

問3 $\boxed{ウ}$ に解答の続きを書き，DEの長さを求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

〔解答〕

ア　△ABDと△ECDにおいて

△ABD∽△ECD

イ　また，BDは直径であるから，∠BAD＝(　　　) 度

ウ

解答欄

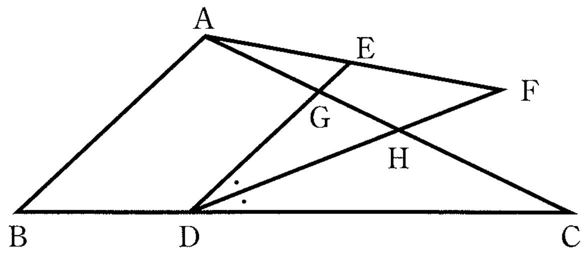
問1	ア〔証明〕 △ABDと△ECDにおいて △ABD∽△ECD
問2	イ また，BDは直径であるから，∠BAD＝(　　　) 度
問3	ウ〔解答の続き〕 答　　　　　cm

【問8】

図で，点Dは線分BC上の点であり，点EはDを通りBAに平行な直線上の点である。∠CDEの二等分線と，AEを延長した直線との交点をFとし，線分ACとDE，線分ACとDFとの交点をそれぞれG，Hとする。AB＝12 cm，AC＝18 cm，BD＝8 cm，DC＝16 cmとする。次の問1，問2に答えなさい。

（岐阜県　2010年度）

問1　DG，AG，GHの長さを，それぞれ求めなさい。



問2　DE＝11 cmのとき，

(1)　△AGE∽△DGHを証明しなさい。

(2)　AF：DFを求めなさい。

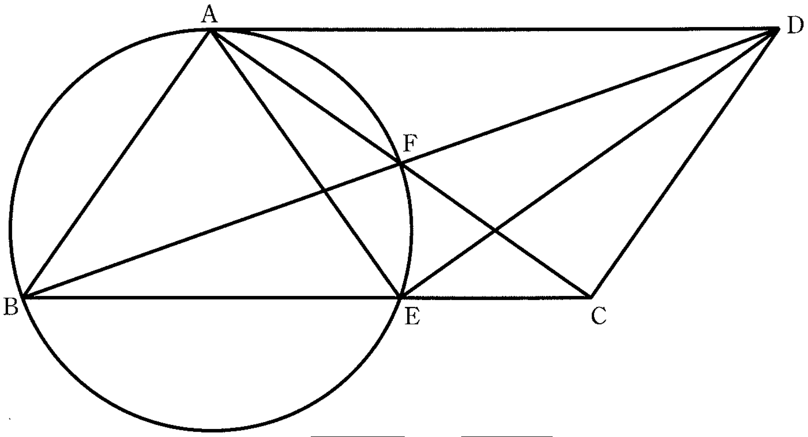
解答欄

問1	DGの長さ　　　　cm	
	AGの長さ　　　　cm	
	GHの長さ　　　　cm	
問2	(1)	〔証明〕
	(2)	：

【問9】

図のように，平行四辺形ABCDの辺BC上にAB＝AEとなる点Eをとる。3点A，B，Eを通る円が，平行四辺形ABCDの対角線の交点Fを通るとき，あとの各問いに答えなさい。ただし，点Eは点Bと異なる点とする。

（三重県　2010年度）



問1　△ABC∽△AFBであることの証明を，次の （ア） ～ （ウ） のそれぞれにあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〔証　明〕
△ABCと△AFBにおいて，
共通だから，
∠BAC＝∠FAB　…①
AB＝AEより，△ABEは二等辺三角形だから，
∠ABC＝ （ア） 　…②
また，同じ弧に対する （イ） の大きさは等しいので，
（ア） ＝ （ウ） …③
②，③より，
∠ABC＝ （ウ） …④
①，④より，2組の角がそれぞれ等しいので，
△ABC∽△AFB

問2　△AED≡△DCAであることを証明しなさい。

問3　AB＝6 cmのとき，次の各問いに答えなさい。なお，各問いにおいて，答えに$\sqrt{\ }$がふくまれるときは，$\sqrt{\ }$の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(1)　線分AFの長さを求めなさい。

(2)　線分BEの中点をMとする。△AECの面積が平行四辺形ABCDの面積の$\frac{1}{6}$となるとき，線分AMの長さを求めなさい。

解答欄

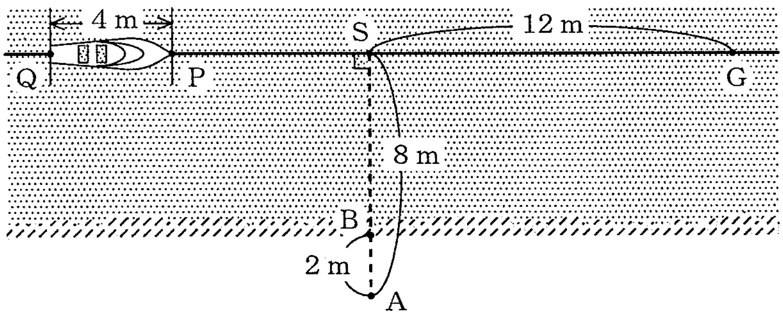
問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	AF＝ cm
	(2)	AM＝ cm

【問10】

図1は，直線SG上を進むボートを，点Aから見ているときの位置関係を表した図である。ボートの船首P，船尾Qは直線SG上を動き，PQ＝4 mとする。また，SG＝12 m，AS＝8 m，SG⊥ASであり，Bは線分AS上の点で，AB＝2 mである。後の問1～問4に答えなさい。

（滋賀県　2010年度）

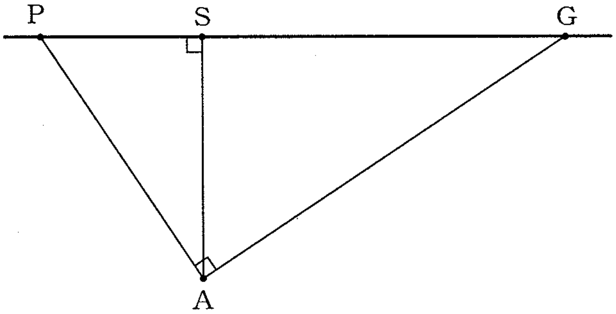
図1



問1　PS＝6 mのとき，2点A，P間の距離は何mか。求めなさい。

問2　図2のように，∠PAG＝90°となったとき，△PAS∽△AGSであることを証明しなさい。

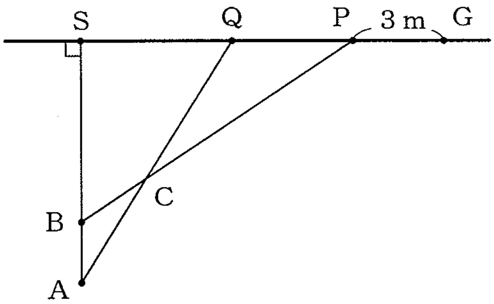
図2



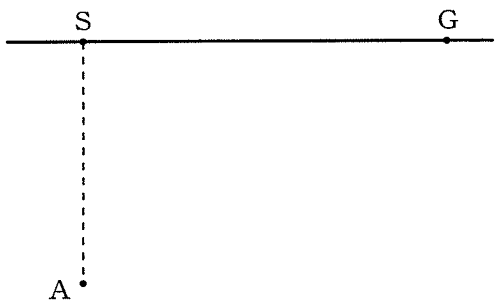
問3　PA＝PGとなる直線SG上の点Pを，コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図に使った線は消さないこと。

問4　図3のように，ボートが点Gの手前にあり，PG＝3 mのとき，AQとBPの交点をCとし，BC：CPを求めなさい。

図3



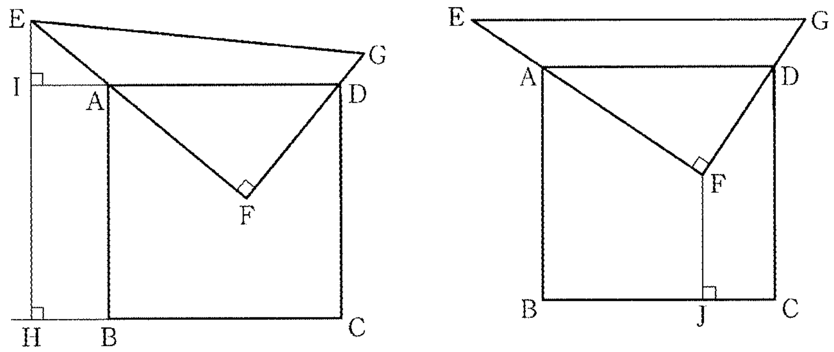
解答欄

問1	m
問2	〔証明〕
問3	
問4	:

【問11】

図1，図2において，四角形ABCDは1辺の長さが5 cmの正方形であり，△EFGは∠EFG＝90°，EF＝6 cm，FG＝4 cmの直角三角形である。A，Dは，それぞれ辺EF，FG上にあって，Fは正方形ABCDの内部にあり，E，Gは正方形ABCDの外部にある。

図1　　　　　　　　　　　　図2



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 前期 2010年度）

問1　図1において，Hは E から直線BCにひいた垂線と直線BCとの交点である。Iは直線EHと直線ADとの交点である。このとき，EH⊥IDである。

(1)　正方形ABCDの対角線BDの長さを求めなさい。

(2)　△AIE∽△AFDであることを証明しなさい。

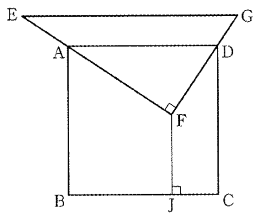
(3)　AF＝x cmとし，3＜x＜5とするとき，線分BHの長さをxを用いて表しなさい。

問2　図2は，EG // ADであるときの状態を示している。図2において，JはFから直線BCにひいた垂線と直線BCとの交点である。

(1)　線分AEの長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2)　線分FJの長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>〔求め方〕

cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

【問12】

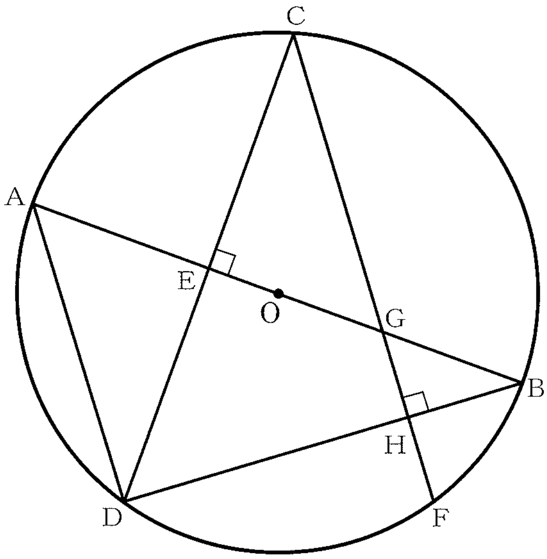
　図で，円Oは線分ABを直径とする半径5 cmの円である。2点C，Dは円Oの周上の点であり，AD＝6 cmで，線分CDと線分ABは，線分OA上の点Eで垂直に交わっている。また，点Cを通り線分BDに垂直な直線と円Oの交点のうち，C以外の点をFとし，線分CFと線分AB，線分BDとの交点をそれぞれG，Hとする。各問いに答えよ。

（奈良県　2010年度）

問1　△CEG∽△BDAであることを証明せよ。

問2　∠ABD＝a°　のとき，∠OCGの大きさをaを用いて表せ。

問3　線分FGの長さを求めよ。



解答欄

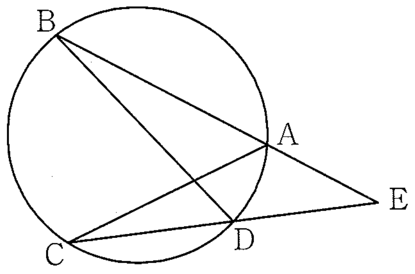
問1	〔証明〕
問2	
問3	cm

【問13】

図のように，同一円周上に4点A，B，C，Dがあり，A，Bを通る直線と，C，Dを通る直線が，点Eで交わっている。このとき，△BDE∽△CAEであることを証明しなさい。

（鳥取県　2010年度）

図



解答欄

〔証明〕

△　BDEと△CAEにおいて

△BDE∽△CAE

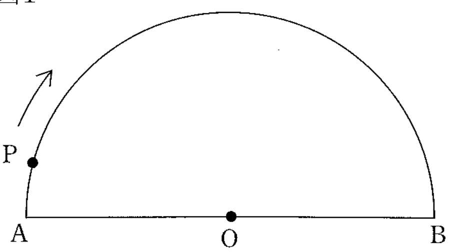
【問14】

図1のように，ABを直径とする半円Oの周上に点Pをとる。点Pは点Aを出発して，時計回りに周上を一定の速さで移動し，点Bまで進むものとする。下の問1，問2に答えなさい。

（島根県　2010年度）

問1　図2のように，点Pが点Aを出発してから2秒後に点Cの位置にきたとする。このとき，点Aを出発してから1秒後の点Pの位置を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図1



問2　図3のように，点Pから直径ABに垂線PHをひく。次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　△APH∽△PBHを証明しなさい。

(2)　図4のように，ある時刻において，PH＝3，BH＝$\sqrt{3}$ となった。このとき，次の①，②に答えなさい。

①　直径ABの長さを求めなさい。

②　おうぎ形OBPを切り取り，図5のように直線 ℓ 上におく。次に，図6のように，このおうぎ形を直線 ℓ 上をすべることなく右に回転させる。線分OPが直線の ℓ に重なるまで回転させたとき，点Oが動いてできる線の長さを求めなさい。

図2

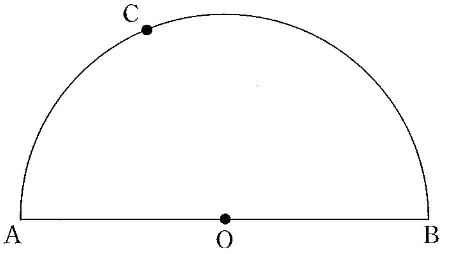


図3

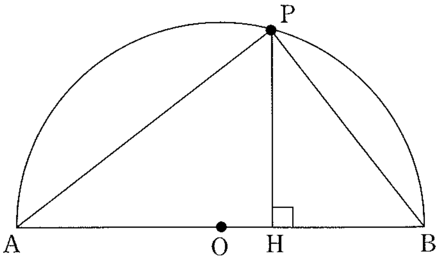


図4

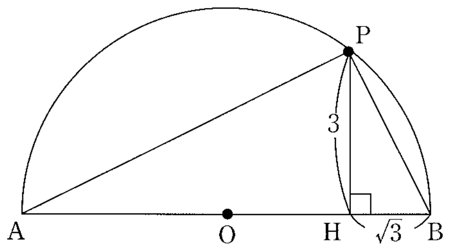


図5

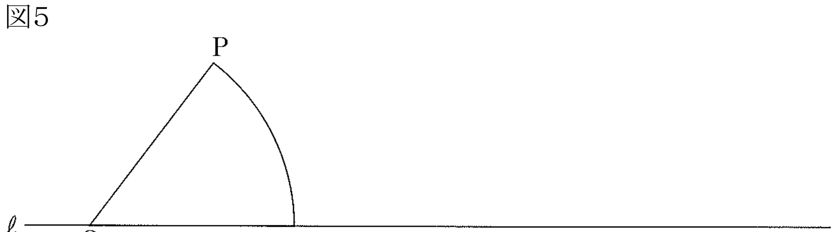
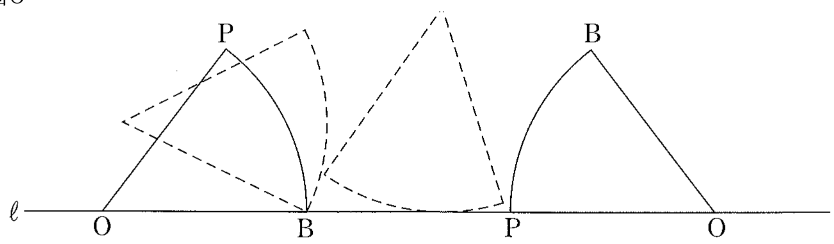
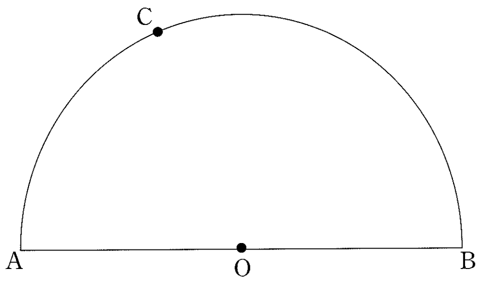


図6



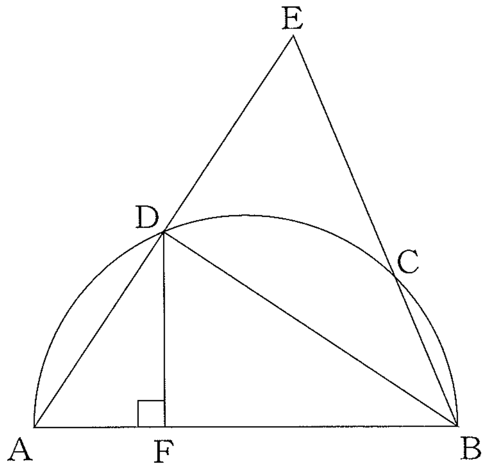
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="3">〔作図〕
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td></td></tr>
<tr><td>②</td><td></td></tr>
</table>

【問15】

図のような，線分ABを直径とする半円があり，点Cは$\overset{\frown}{AB}$上の点である。∠CBAの二等分線をひき，$\overset{\frown}{AC}$との交点をDとし，直線ADと直線BCとの交点をEとする。また，点Dから線分ABに垂線をひき，その交点をFとする。このとき，次の問いに答えなさい。

（香川県　2010年度）



問い　△ABD∽△ADF　であることを証明せよ。

解答欄

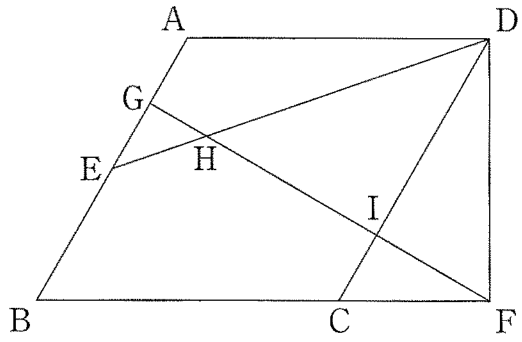
〔証明〕

【問16】

AB＝4 cm，∠ABC＝60°のひし形ABCDがある。下の図のように，辺ABの中点Eをとり，点Eと点Dを結ぶ。点Dを通り辺BCに垂直な直線と辺BCを延長した直線の交点をFとする。点Fを通り辺ABに垂直な直線と辺ABの交点をGとする。線分GFと線分DE，DCの交点をそれぞれH，Iとする。

次の問1は指示にしたがって答え，問2，問3は $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2010年度）



問1　上の図において，相似な三角形を1組選び，その2つの三角形が相似であることを，右の ┆　　┆ の中に証明せよ。

〔証明〕

問2　線分DEの長さは $\boxed{\text{cm}}$ である。

問3　GH：HF＝ $\boxed{}$：$\boxed{}$ である。

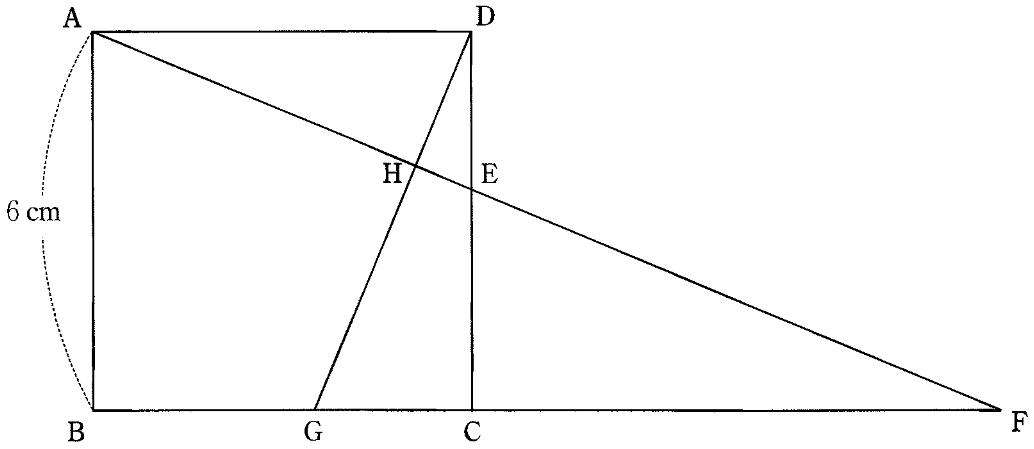
解答欄

問1	
問2	
問3	

【問17】

図のように，1辺が6 cmの正方形ABCDがある。辺CD上に点Eをとり，線分AEの延長と辺BCの延長の交点をFとする。辺BC上にCG＝DEとなる点Gをとり，線分AEと線分DGの交点をHとする。次の問1，問2に答えなさい。

（大分県　2010年度）



問1　△CDG∽△HFGとなることを次のように証明した。ア には，△CDGと△DAEが合同であることの証明を，イ，ウ には適する式を書いて，証明を完成させなさい。

〔証明〕

△CDG と△DAE において，

ア

したがって，　∠CDG＝∠DAE　…①

ここで，AD // BF より

∠DAE＝∠HFG (錯角)　…②

△CDG と△HFG において

①，②より，　イ　…③

また，　ウ　(共通)　…④

③，④より，

2 組の角がそれぞれ等しいから

△CDG∽△HFG

問2　線分BFの長さが18 cmのとき，線分HGの長さを求めなさい。

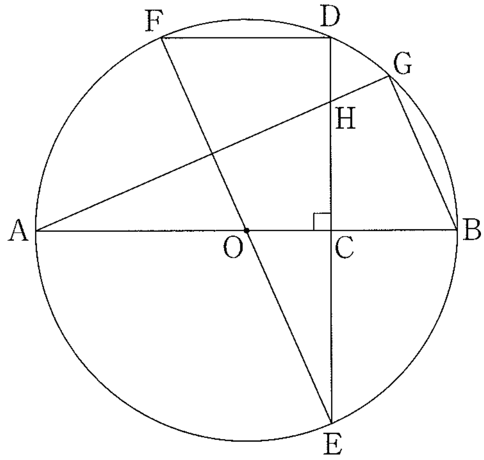
解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	cm	

【問18】

図は，点Oを中心とする円で，線分ABは円の直径である。点Cは線分OB上にあって，2点D，Eは，点Cを通る線分OBの垂線と円Oとの交点で，点FはEOの延長と円Oとの交点である。また，点Gは点Aをふくまない$\overset{\frown}{BD}$上にあって，点Hは線分AGと線分CDとの交点である。このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

（熊本県　2010年度）



問1　△ABG∽△AHCであることを証明しなさい。

問2　AB＝5 cm，OC＝1 cm，AG＝DEのとき，

(1)　線分BGの長さを求めなさい。

(2)　線分CHの長さを求めなさい。

解答欄

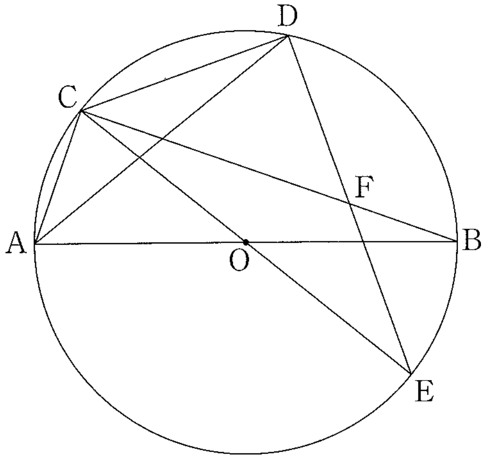
問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

【問19】

図は，点Oを中心とする円で，線分ABは円の直径である。点Cは円Oの周上にあって，点Dは点Aをふくまない$\overset{\frown}{BC}$上にある。点EはCOの延長と円Oとの交点で，点Fは線分BCと線分DEとの交点である。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2010年度）

問1　△ADC∽△ECFであることを証明しなさい。



問2　AB＝9 cm，AC＝3 cm，AD＝7 cmのとき，線分DFの長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

【問20】

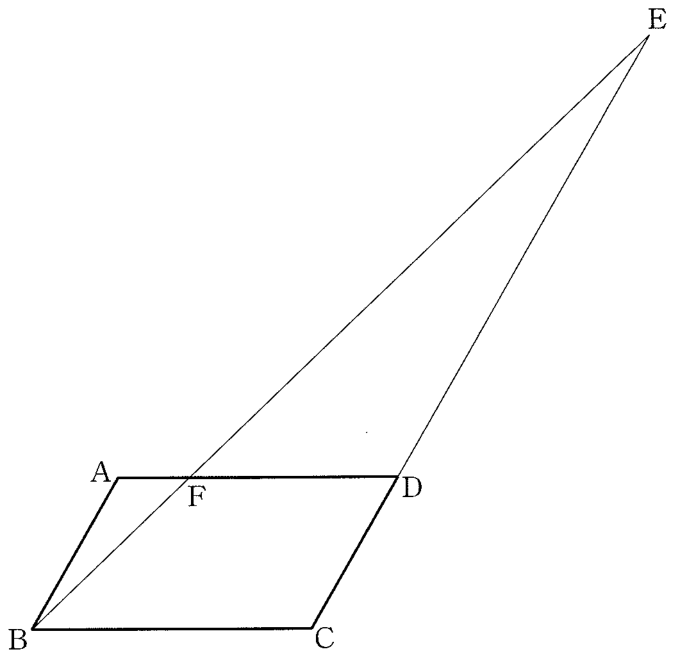
図のような，平行四辺形ABCDがあり，∠ABC＝60° である。点Eは辺CDの延長上にあり，点Fは線分BEと辺ADとの交点である。このとき，次の問1～問4に答えなさい。

（宮崎県　2010年度）

問1　∠BADの大きさを求めなさい。

問2　△ABF∽△DEFであることを証明しなさい。

問3　図において，辺BAの延長と線分CFの延長との交点をGとし，線分EGをひく。このとき，△EGFと面積の等しい三角形を1つ答えなさい。また，その2つの三角形の面積が等しくなるわけを説明しなさい。



問4　上の図において，AB＝4 cm，BC＝8 cm，AF＝2 cmのとき，線分BEの長さを求めなさい。

解答欄

問1	∠BAD＝　　　　　　度
問2	〔証明〕
問3	△ 〔説明〕
問4	cm

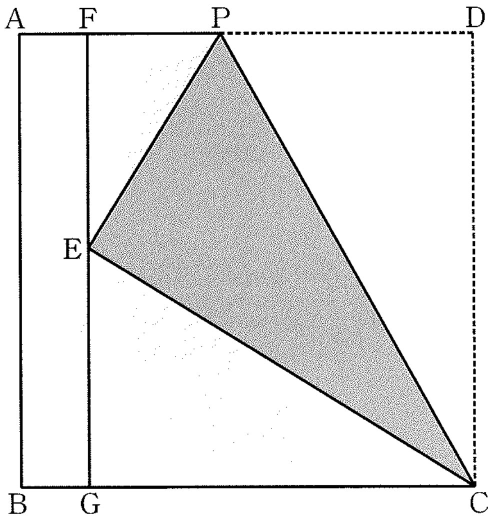
【問21】

図は，1辺の長さが8 cmの正方形ABCDにおいて，辺AD上に2つの頂点A，Dと異なる点Pをとり，線分CPを折り目として折り返し，頂点Dが移った点をEとしたものである。

また，点Eを通り辺ABと平行な直線と線分AP，辺BCとの交点をそれぞれF，Gとしたものである。このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（鹿児島県 2010年度）

問1 ∠ECP＝28° のとき，∠ECGの大きさは何度か。



問2 △EPF∽△CEGであることを証明せよ。

問3 FE＝EGのとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1) 線分EPの長さは何cmか。

(2) 点Pから辺BCにひいた垂線と辺BCとの交点をIとする。点Iを通り四角形ICPEの面積を2等分する直線と線分EC，PCとの交点をそれぞれS，Rとするとき，△ESRの面積は何cm^2か。

解答欄

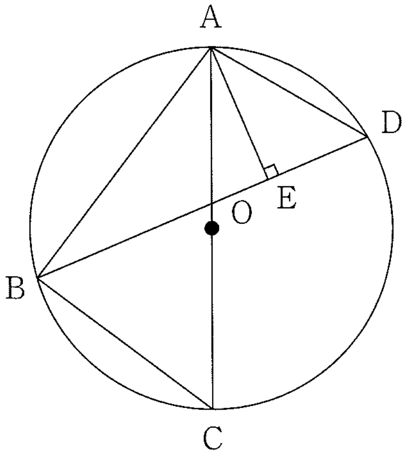
問1		度
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^2

【問22】

図のように，点Oを中心とする円Oの周上に4つの点A，B，C，Dがあり，線分ACはその円の直径である。また，点Aから線分BDに垂線をひき，BDとの交点をEとする。このとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県　2010年度）

問1　△ABC∽△AEDとなることを証明しなさい。



問2　AB＝4 cm，AC＝6 cm，AD＝3 cmとする。

(1)　AEの長さを求めなさい。

(2)　BDの長さを求めなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	cm
	(2)	cm