4－2. 平面図形　相似の証明　複合問題ほか　2003年度出題

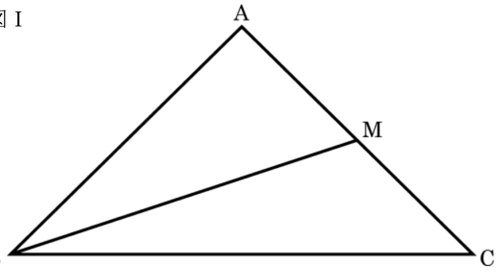
【問1】

図Ⅰのように，AB＝AC＝4 cmである直角二等辺三角形ABCにおいて，辺ACの中点をMとして，点Bと点Mを結びます。次の1～3の問いに答えなさい。

（宮城県　2003年度）

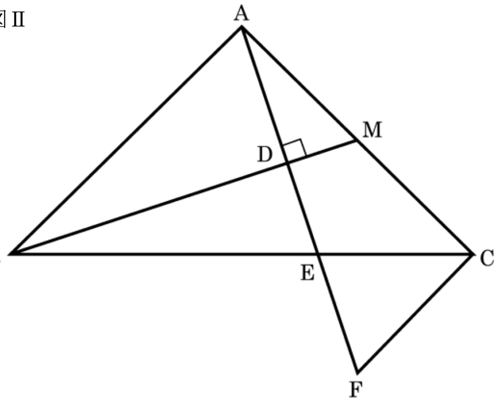
1．∠ACBの大きさを求めなさい。

図Ⅰ



2．線分BMの長さを求めなさい。

図Ⅱ



3．図Ⅱのように，図Ⅰの直角二等辺三角形ABCの点Aを通り，線分BMに垂直な直線をひきます。この直線と線分BMとの交点をD，辺BCとの交点をEとします。また，この直線と，点Cを通り辺ABに平行な直線との交点をFとします。次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

⑴　△ABE∽△FCEを証明しなさい。

⑵　線分AEの長さを求めなさい。

⑶　△BEDの面積を求めなさい。

解答欄

1		度	
2		cm	
3	(1)	証明	
	(2)		cm
	(3)		cm^2

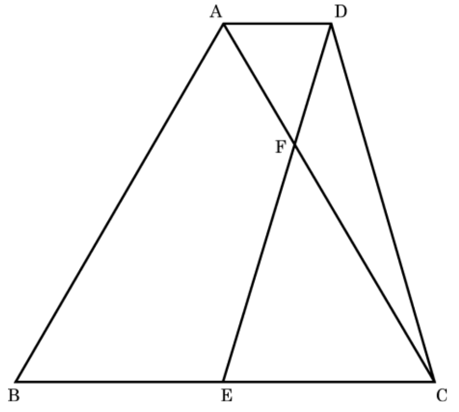
【問2】

図で，四角形ABCDはAD // BCの台形であり，△ABCは正三角形である。点Eは線分BCの中点であり，DE＝DCである。線分AC，DEの交点をFとする。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（秋田県　2003年度）

(1)　△ADF∽△CEFとなることを証明しなさい。

(2)　AB＝8 cmのとき，△CDFの面積を求めなさい。



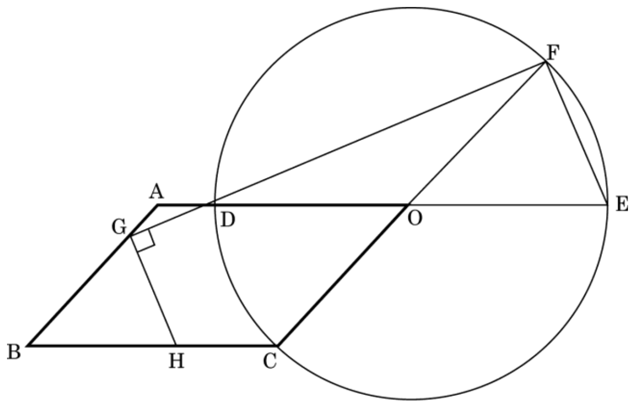
解答欄

(1)	証明
(2)	cm^2

【問3】

図のような，OA＞OCである平行四辺形OABCがある。点Oを中心として点Cを通る円をかき，この円Oと辺AOとの交点をD，辺AO，COの延長と円Oとの交点をそれぞれE，Fとする。また，FDの延長と辺ABとの交点をGとする。次に，辺BC上に∠FGH＝90°となるように点Hをとる。このとき，△BGH∽△OFEとなることを証明しなさい。

（福島県 2003年度）



解答欄

証明

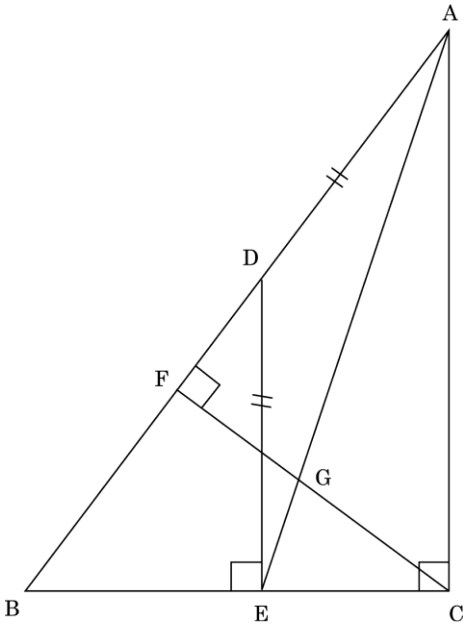
【問4】

図のように，∠ACB＝90° の直角三角形ABCがある。辺AB上に点D，辺BC上に点Eがあって，AD＝DE，DE⊥BCである。また，点Cから辺ABに垂線CFを引き，線分AEとCFの交点をGとする。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（千葉県 2003年度）

(1) △AFGと△ACEが相似であることを証明しなさい。

(2) AB＝9 cm，AD＝4 cmのとき，CGの長さを求めなさい。



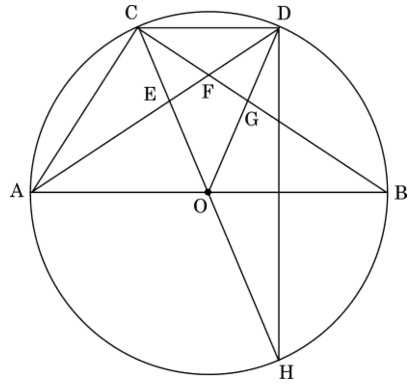
解答欄

(1)	証明
(2)	cm

【問5】

図のように，線分ABを直径とする円Oがあり，円Oの周上に点Aとは異なる点CをAC＜BCとなるようにとる。また，点Aをふくまない弧$\overset{\frown}{BC}$上に，点DをAB∥CDとなるようにとり，線分ADと線分OCとの交点をE，線分ADと線分BCとの交点をFとする。さらに，線分BCと線分ODとの交点をGとする。このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2003年度）



(ア)　三角形OEAと三角形FGDが相似であることを次のように証明した。空欄にあてはまるものとして最も適するものを，(あ)～(う)には【A群】から，(a)，(b)には【B群】から，(c)には【C群】から，それぞれ1つずつ選び，その番号を書きなさい。

［証明］

△OEAと△FGDにおいて，
まず，△ODAは二等辺三角形だから，
(a)
よって，∠OAE＝∠FDG　…①
次に，弧$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角と中心角の関係から，
∠ADC＝$\frac{1}{2}$∠AOC
よって，∠AOC＝2∠ADC　…②
また，(あ)から，
∠BAD＝∠BCD　…③
さらに，(い)から，
∠BAD＝∠ADC　…④
③，④より，∠BCD＝∠ADC　…⑤
ここで，△FDCの内角と外角の関係から，
∠DFG＝∠FDC＋∠FCD
よって，∠DFG＝∠ADC＋∠BCD　…⑥
⑤，⑥より，∠DFG＝2∠ADC　…⑦
②，⑦より，(b)
よって，∠AOE＝∠DFG　…⑧
①，⑧より，(う)から，
△OEA (c) △FGD

【A群】

1. 平行線の同位角は等しい
2. 平行線の錯角は等しい
3. 弧$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角は等しい
4. 弧$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角は等しい
5. 3組の辺の比が等しい
6. 2組の辺の比が等しく，その間の角が等しい
7. 2組の角がそれぞれ等しい

【B群】

1. ∠OAC＝∠OCA
2. ∠OAD＝∠ODA
3. ∠OBC＝∠OCB
4. ∠OEA＝∠CED
5. ∠AOC＝∠DFG

【C群】

1. ≡
2. ＝
3. ∽

(イ)　∠ABC＝33°のとき，線分COの延長と円Oとの交点をHとして，∠CHDの大きさを求めなさい。

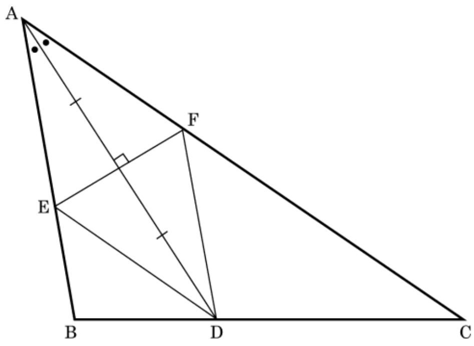
解答欄

(ア)	(a)	
	(あ)	
	(い)	
	(b)	
	(う)	
	(c)	
(イ)	$\angle$CHD＝　　　　°	

【問6】

図の△ABCで，∠BACの二等分線と辺BCとの交点をDとし，線分ADの垂直二等分線と辺AB，ACとの交点をそれぞれE，Fとする。EとD，FとDをそれぞれ結ぶ。次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（岐阜県 2003年度）



⑴ ∠EADと大きさが等しい角は∠FADのほかに2つある。この2つの角を書きなさい。

⑵ △EBD∽△FDCであることを証明しなさい。

⑶ EB＝2 cm，ED＝4 cmのとき，FCの長さを求めなさい。

解答欄

(1)		
(2)	証明	
(3)	cm	

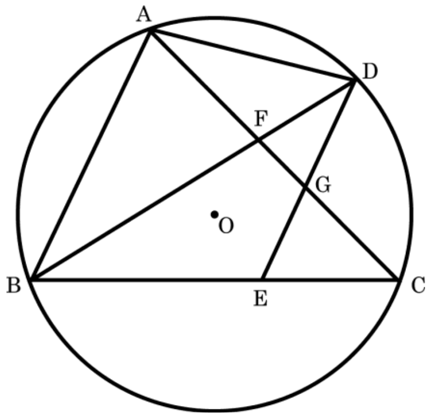
【問7】

図において，3点A，B，Cは円Oの円周上の点である。∠ABCの二等分線と円Oとの交点をDとし，BC上にBE＝DEとなる点Eをとる。ACとDB，DEとの交点をそれぞれF，Gとする。このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（静岡県 2003年度）

⑴ △ABF∽△GADであることを証明しなさい。

⑵ AB＝6 cm，BE＝5 cm，EC＝3 cmのとき，DGの長さを求めなさい。



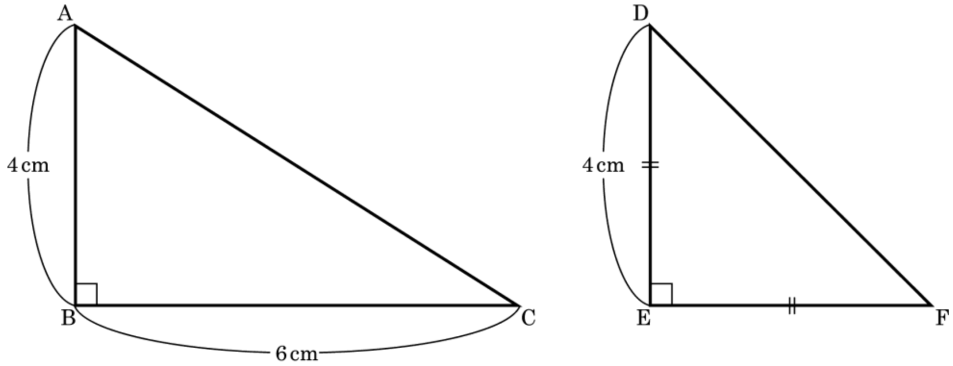
解答欄

<table>
<tr><td rowspan="1">(1)</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td><td></td></tr>
</table>

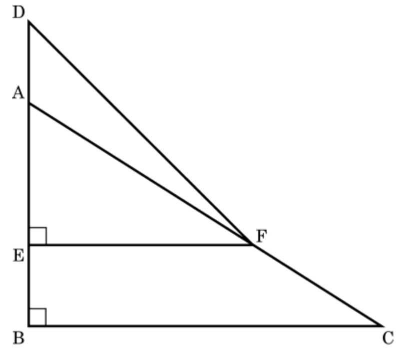
【問8】

図のように，∠ABC＝90°，AB＝4 cm，BC＝6 cmの直角三角形ABCと，∠DEF＝90°，DE＝EF＝4 cmの直角二等辺三角形DEFがある。このとき，次の各問いに答えなさい。

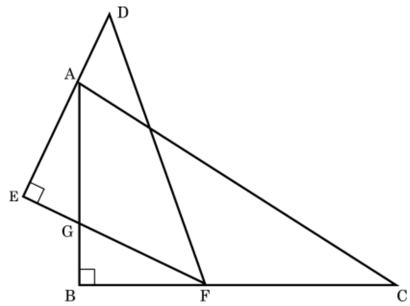
（三重県 2003年度）



(1) 上の図のように，辺DEが辺ABと重なり，頂点Fが辺AC上にあるように2つの直角三角形を置くとき，線分EBの長さを求めなさい。



(2) 右下の図のように，辺DE上に頂点Aがあり，頂点Fが辺BC上にくるように2つの直角三角形を置く。辺ABと辺EFの交点をGとするとき，△AGF∽△BGEであることの証明を，次の （ア） と （イ） に適切なことがらを書き入れて完成しなさい。ただし，（イ） には〈証明〉の中にある④を使って証明の続きを書きなさい。



〈証明〉 △ABFと△FEAにおいて，条件より

∠ABF＝∠FEA＝90° …①

AB＝FE …②

また，AF＝FA （共通） …③

①，②，③から，

（ア） が，それぞれ等しいから，

△ABF≡△FEA …④

（イ）

よって，△AGF∽△BGE

解答欄

(1)	cm
(2)	問題文中の解答欄に記入

【問9】

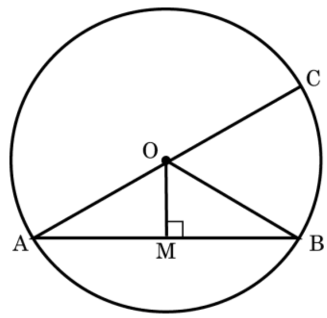
図Ⅰ～図Ⅲにおいて，円Oの半径は6 cmである。A，B，Cは円Oの周上の点であり，ACは円Oの直径である。AとB，OとBとをそれぞれ結ぶ。△OABの内角∠AOBの大きさは120° である。MはOから弦ABにひいた垂線と弦ABとの交点である。円周率をπとして，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になるときは，根号の中の数をできるだけ小さい自然数で表すこと。

（大阪府　前期　2003年度）

(1)　図Ⅰにおいて，

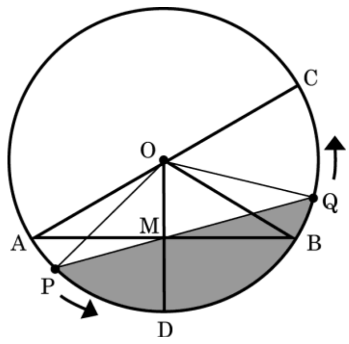
①　半周より短い弧$\overset{\frown}{AB}$の長さを求めなさい。

図Ⅰ



②　線分AMの長さを求めなさい。

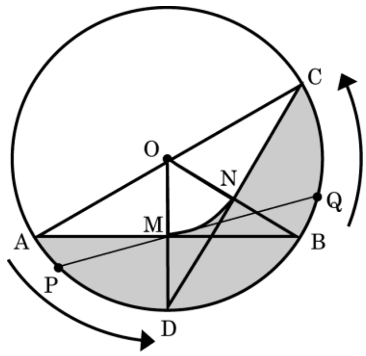
図Ⅱ



③　BとCとを結んで△ABCをつくる。△ABC∽△BMOであることを証明しなさい。

(2)　図Ⅱにおいて，Dは直線OMと半周より短い弧$\overset{\frown}{AB}$との交点である。PはAを出発し，半周より短い弧$\overset{\frown}{AD}$上をDまで動く点である。Qは点Pが動き始めるのと同時にBを出発し，∠POQ＝120° を保ちながら半周より短い弧$\overset{\frown}{BC}$上をCまで動く点である。図Ⅱ中の　で示したところは，弦PQと半周より短い弧$\overset{\frown}{PQ}$とで囲まれた図形である。この図形をFとする。図Ⅲにおいて，Nは線分OBと弦CDとの交点である。図Ⅲ中の　で示したところは，点PがAからDまで動いていくときに図形Fが通る部分であり，図形OMNはOM，ONを半径とするおうぎ形である。図Ⅲ中の　で示した部分の面積を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図Ⅲ



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">(1)</td><td>①</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>③</td><td>証明</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">（求め方）

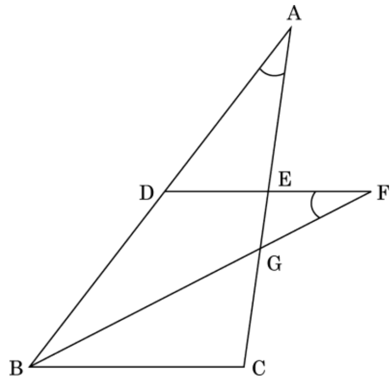
cm²</td></tr>
</table>

【問10】

図のように，AC＝10 cm，BC＝6 cmの△ABCがある。辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとし，DEの延長線上に∠BFD＝∠BACとなるような点Fをとると，BF＝11 cmとなった。BFとACの交点をGとするとき，次の問いに答えなさい。

（兵庫県 2003年度）

(1) DEの長さを求めなさい。



(2) △ADEと△BGCが相似であることを次のように証明した。

次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ にあてはまるものを，下の語群のア～ソから選び，記号で答えなさい。

(証明)
△ABCにおいて，点D，Eはそれぞれ辺AB，ACの中点だから，BC $\boxed{1}$ DE

△ADEと△BGCにおいて，

仮定から，∠DAE＝∠BFD　…①

平行線の $\boxed{2}$ は等しいから，∠BFD＝∠ $\boxed{3}$ …②

①，②より，∠DAE＝∠ $\boxed{3}$ …③

また，平行線の $\boxed{4}$ は等しいから，∠AED＝∠ $\boxed{5}$ …④

③，④より，2組の角がそれぞれ等しいから，

△ADE $\boxed{6}$ △BGC

語群					
	ア 対頂角	イ 鋭角	ウ 鈍角	エ 錯角	オ 同位角
	カ ≡	キ ＝	ク ∽	ケ ∥	コ ⊥
	サ ABF	シ BCG	ス ADE	セ GBC	ソ BGC

(3) ABの長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm					
(2)	1	2	3	4	5	6
(3)	cm					

【問11】

数学の授業で，長さが$\sqrt{a}$ cmの線分をつくる方法について，先生から，次のような説明があり，課題が示された。各問いに答えよ。

（奈良県 2003年度）

図1で，2点A，Bは直線ℓ 上の点で，AB＝1 cmであり，半直線BCは直線ℓ と垂直です。まず，直線ℓ 上に点Pを，点Bに関して点Aと反対側にとります。次に，図2のように，線分APを直径とする円Oをかき，半直線BCとの交点をQとします。このとき，BP＝2 cmであればBQ＝$\sqrt{2}$ cm，BP＝3 cmであればBQ＝$\sqrt{3}$ cmとなります。BP＝a cmとするとBQ＝$\sqrt{a}$ cmになりますが，なぜそうなるのか，その理由を考えてみましょう。

図１

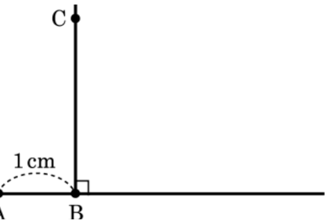
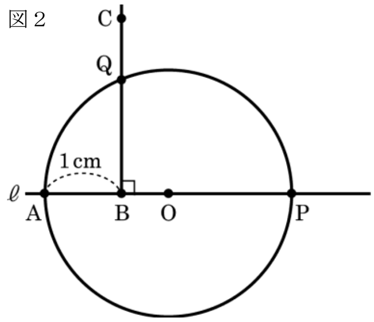


図２



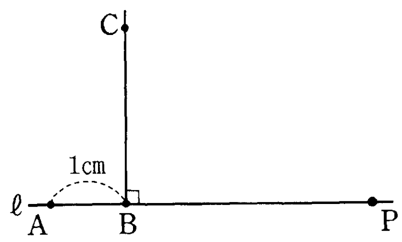
(1) 点Pが解答欄の図に示した位置にあるとき，上の文中の下線部に従って，点Qを定規とコンパスを使って解答欄の枠内に作図せよ。なお，作図に使った線は消さずに残しておくこと。

(2) BP＝a cmのとき，BQ＝$\sqrt{a}$ cmとなることを，次のア，イの順序で証明せよ。

ア △ABQ∽△QBPであることを証明する。

イ △ABQ∽△QBPであることを用いて，BQ＝$\sqrt{a}$ cmとなることを証明する。

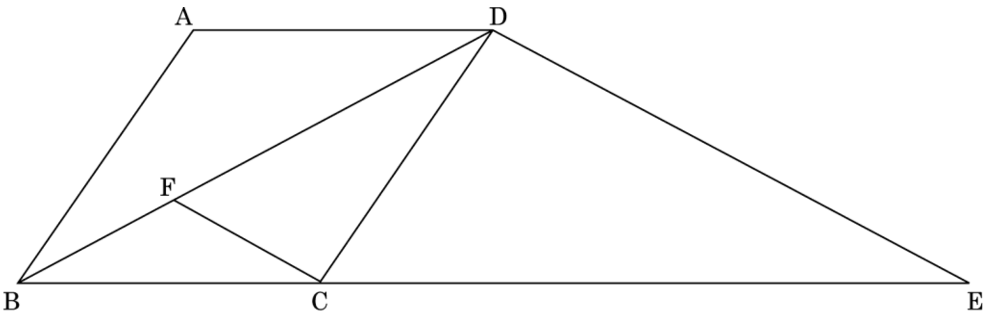
解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">作図
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>ア</td><td>〔$\triangle ABQ \backsim \triangle QBP$ の証明〕</td></tr>
<tr><td>イ</td><td>〔BQ＝$\sqrt{a}$ cmの証明〕</td></tr>
</table>

【問12】

図のように，ひし形ABCDと，DB＝DEである二等辺三角形DBEがあります。辺BE上に点Cがあり，対角線BD上にCF∥EDとなるように点Fをとります。これについて，次の(1)・(2)に答えなさい。

（広島県　2003年度）



(1)　△CDF∽△DECであることを証明しなさい。

(2)　ひし形ABCDの面積が36 cm²，BD＝12 cmのとき，辺ADの長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔仮定〕図において，四角形ABCD はひし形，DB＝DE，CF∥ED 〔結論〕△CDF ∽ △DEC 〔証明〕
(2)	cm

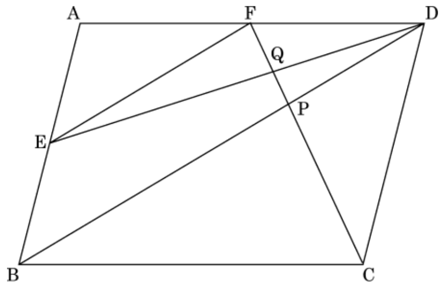
【問13】

図のように，平行四辺形ABCDの辺AB，ADの中点をそれぞれE，Fとし，対角線BDと線分CFの交点をP，線分CFと線分DEの交点をQとする。次の⑴，⑵に答えなさい。

（山口県　2003年度）

⑴　△EFQ∽△DPQであることを証明しなさい。

⑵　FP＝3 cmのとき，線分PQの長さを求めなさい。



解答欄

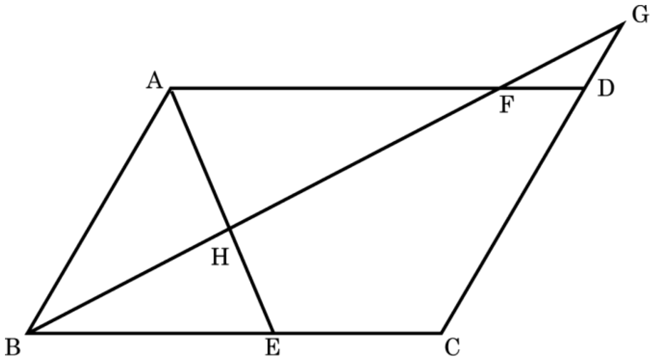
(1)	証明
(2)	cm

【問14】

AB＝7 cm, BC＝10 cm, ∠ABC＝60° の平行四辺形ABCDがある。図のように，辺BC上にBE＝6 cmとなる点E，辺AD上にAF＝8 cmとなる点Fをとり，点Bと点Fを通る直線と辺CDを延長した直線との交点をGとする。

また，点Aと点Eを結び，線分AEと線分BFとの交点をHとする。次の(1)は指示にしたがって答え，(2)，(3)は □ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県 2003年度）



(1) 上の図において相似な三角形を1組選び，その2つの三角形が相似であることを右の □ の中に証明せよ。

証明

(2) 平行四辺形ABCDの面積は □ cm^2 である。

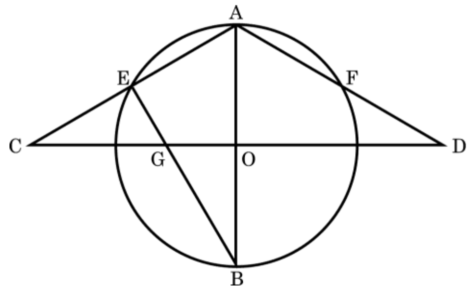
(3) HF：FG＝ □ ： □ である。

【問15】

図のように，ABを直径とする円Oがある。また，辺CDの中点が中心Oと重なり，∠CADが鈍角である二等辺三角形ACDがある。辺AC，ADと円Oとの交点をそれぞれE，Fとし，BEとCDとの交点をGとする。このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（佐賀県 2003年度）

⑴ △ACO∽△GCEであることを証明しなさい。



⑵ AB＝6 cm，∠CAD＝120° のとき，次の(ア)～(ウ)の各問いに答えなさい。

(ア) EGの長さを求めなさい。

(イ) 点Aをふくむ$\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$の長さを求めなさい。

(ウ) △ACDと円Oの重なった部分の面積を求めなさい。

解答欄

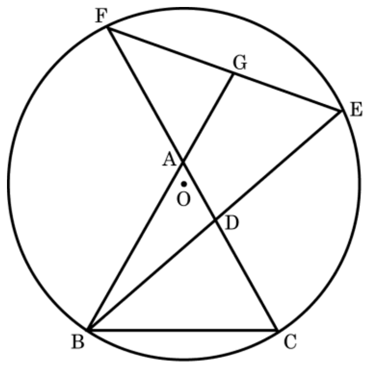
(1)		
(2)	(ア)	cm
	(イ)	cm
	(ウ)	cm^2

【問16】

図のように，正三角形ABCの頂点B，Cを通る円Oがある。辺AC上に2点A，Cとは異なる点Dをとり，BDの延長と円Oとの交点をEとする。また，CAの延長と円Oとの交点をF，BAの延長と線分EFとの交点をGとする。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2003年度）

⑴ △BCD∽△FAGであることを証明しなさい。



⑵ AB＝6 cm，CD＝4 cm，AF＝5 cmのとき，線分EGの長さを求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

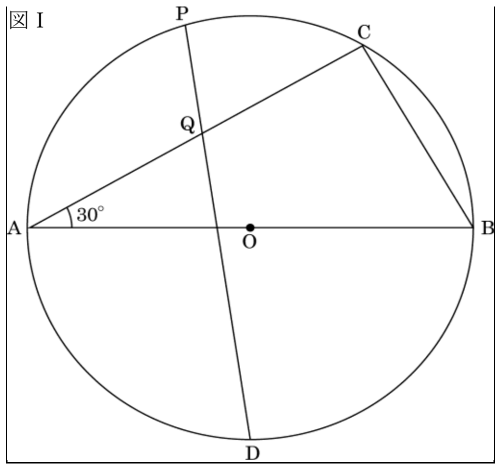
(1)	証明
(2)	cm

【問17】

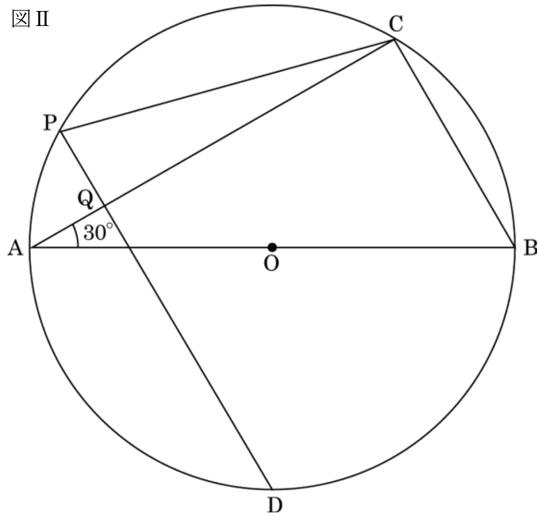
図Ⅰのように，△ABCの各頂点および点Dは，辺ABを直径とする円Oの円周上にあり，∠CAB＝30°，$\overset{\frown}{AD}$＝$\overset{\frown}{BD}$である。また，図のように点Pを$\overset{\frown}{AC}$上にとり，弦ACと弦PDとの交点をQとする。AB＝12 cmとして，次の⑴～⑷の問いに答えなさい。

（宮崎県　2003年度）

⑴　∠ACBの大きさを求めなさい。



⑵　点Bを含む$\overset{\frown}{CD}$の長さを求めなさい。ただし，円周率はπとする。



⑶　△PQA∽△CQDであることを証明しなさい。

⑷　図Ⅱは，図Ⅰにおいて，点Pが$\overset{\frown}{AC}$上を動いてPD∥CBとなったものである。このとき，△PQCの周の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	∠ACB＝　　　　　度
(2)	$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$＝　　　　　cm
(3)	証明
(4)	cm