

8. 式の証明

【問1】

図1のように自然数を並べた表があります。図2のように、この表で縦3つ横3つの9つの数を□で囲むと、「4すみにある数の和は、中央にある数の4倍に等しい。」という関係が成り立ちます。このとき、どの9つの数を囲んでもこの関係が成り立つわけを、文字の式を使って説明しなさい。

(埼玉県 2002 年度)

図1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	・	・	・	・	・		

図2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	・	・	・	・	・		

$$6+8+26+28=17\times 4$$

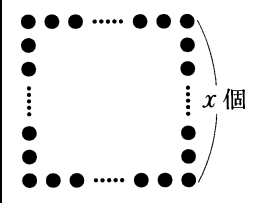
解答欄

証明

【問2】

Aさん, Bさん, Cさんの3人は, 授業で次の問題について考えた。


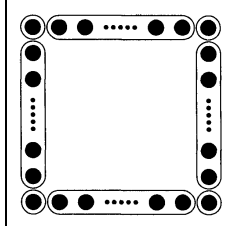
(山梨県 2002 年度)


<p style="text-align: center;">〔問題〕</p> <p>右の図のように, 各辺に同じ数のボールを並べて, 正方形の形をつくる。1辺に並べるボールの個数を x 個とすると, ボール全部の個数を x の式で表しなさい。</p>	
--	---

(1) この問題に対して, 3人は, それぞれ次のような式を立てた。

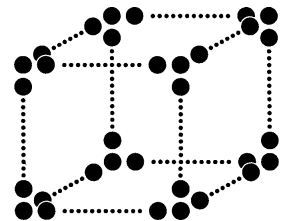
〔Aさん〕	〔Bさん〕	〔Cさん〕
$4(x-2)+4$	$2x+2(x-2)$	$4(x-1)$

Aさんは, 式を立てるのに, 次のように考えた。

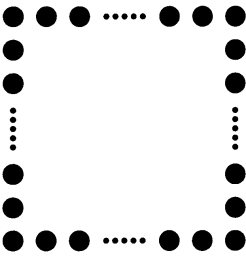
<p style="text-align: center;"><Aさんの考え></p> <p>ボールを図のように線で囲むと, 細長い  で囲んだ部分には, $(x-2)$ 個のボールが並び, それが4つある。それに, すみの4個を足せばよい。</p>	
---	--

Bさん, Cさんのどちらか一方を選び, その人がどのように考えて式を立てたのかが分かるように, 解答らんの図をAさんにならって  で囲みなさい。解答らんの[]には, 選んだ方を書きなさい。

(2) 最初の問題の「正方形の形」を「立方体の形」に変え, 右の図のように, 各辺にボールを並べたところ, ボール全部の個数が 92 個になった。このとき, 立方体の1辺に並ぶボールの個数を求めなさい。ただし求める過程も書くこと。



解答欄

<p>(1)</p>	<p>[さん]</p>	
<p>(2)</p>	<p>求める過程</p> <p style="text-align: right;">答 個</p>	

【問3】

直前の2つの数をたしたものが、次の数になるという規則で、数を並べる。例えば、 $-1, 2$ からはじめると次のようになる。

$$-1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$$

(長野県 2002 年度)

① この規則を用いて、 $5, -2$ からはじめたとき先頭から6番目の数を求めなさい。

② ある2つの数からはじめたところ、6番目の数が **17** となった。このとき、8番目の数から5番目の数をひいた差を求めなさい。また、どのように求めたか、説明しなさい。

解答欄

①	
②	差
	説明

【問4】

メモりのついた3つの容器 A, B, C(いずれも容積は 1000 cm^3)がある。A には 230 cm^3 , B には 270 cm^3 , C には 400 cm^3 の水が入っている。これら3つの容器から1つを選び, その容器の水を他の2つの容器に残さず入れ, 一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方を, 太郎さんと花子さんはそれぞれ考えた。次の(1)~(4)の問いに答えなさい。

(岐阜県 2002 年度)

(1) A の水をすべて B に入れると, B の水の量は C の水の量の何倍になるかを求めなさい。

(2) 太郎さんはAの水をBとCに残さず入れ一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方を次のように考えた。アには文字を使った式を, イには方程式を, ウ, エには数を, それぞれあてはまるように書きなさい。

A から B に入れる水の量を $x \text{ cm}^3$ とすると A から C に入れる水の量は x を用いて cm^3 と表せる。
A の水をすべて B に入れても, B の水の量は C の水の量の2倍にはならない。
よって, C の水の量が B の水の量の2倍になる分け方を考えて, x についての方程式
 をつくった。
この方程式を解いて, B に cm^3 の水を, C に cm^3 の水をそれぞれ入れればよいことがわかった。

(3) 花子さんは, B の水を A と C に残さず入れ, 一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方を次のように考えた。オ~クにそれぞれあてはまる数を書きなさい。

A, B, C の水の量を合計すると 900 cm^3 になるので, B の水を残さず入れたとき, B 以外の2つの容器の水の量は cm^3 と cm^3 になればよい。
よって, 最初の A と C の水の量を考えると, A に cm^3 の水を, C に cm^3 の水をそれぞれ入れればよいことがわかった。

(4) C の水を A と B に残さず入れ, 一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方をすべて書きなさい。

解答欄

(1)	倍	
(2)	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
(3)	オ	
	カ	
	キ	
	ク	
(4)		

【問5】

図のように、奇数を1から順に6個ずつ並べる。縦、横2個ずつの数を線で囲み、わくの中の4つの数を小さい方から順に a, b, c, d とする。

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	·	·
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·

たとえば

15	17
27	29

 のわくでは $a=15, b=17, c=27, d=29$ である。

次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

(岐阜県 2002 年度)

(1) $a=19$ のとき、 $a+b+c+d$ の値を求めなさい。

(2) a, b, c, d について調べてみると、次のような関係があることがわかった。

わくをどこにとっても、 $a+b-c-d$ の値は -24 になる。

さらに、 $+$ 、 $-$ の符号のいくつかをかえて調べてみると、次のような関係は2通りあることがわかった。

わくをどこにとっても、 $a-b$ ア c イ d の値は ウ になる。

この関係が成り立つようにア、イにはそれぞれ $+$ か $-$ を、ウには数を、2通り書きなさい。

(3) わくをどこにとっても、 $a+b+c+d$ は 8 の倍数になることを説明しなさい。

解答欄

(1)							
(2)	ア	イ	ウ	または	ア	イ	ウ
(3)							

【問6】

Mさんは、図1のような「かけ算九九の表」をながめているうち、次のことに気がついた。

「図2のア～エのように、図1の表の 81 個の数字が並んでいる部分を、1 がそれぞれ左上、右上、左下、右下になるように置くと、図2の(例)のように、同じ位置にある4つの数の和は、すべて 100 になる。」

このことを証明したい。□の中に、証明の続きを書きなさい。

(静岡県 2002 年度)

図1

☆かけ算九九の表☆

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図2

ア (1が左上になるとき)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

イ (1が右上になるとき)

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	24	21	18	15	12	9	6	3
36	32	28	24	20	16	12	8	4
45	40	35	30	25	20	15	10	5
54	48	42	36	30	24	18	12	6
63	56	49	42	35	28	21	14	7
72	65	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

ウ (1が左下になるとき)

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	24	21	18	15	12	9	6	3
36	32	28	24	20	16	12	8	4
45	40	35	30	25	20	15	10	5
54	48	42	36	30	24	18	12	6
63	56	49	42	35	28	21	14	7
72	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

エ (1が右下になるとき)

9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	16	24	32	40	48	56	64	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63
6	12	18	24	30	36	42	48	54
5	10	15	20	25	30	35	40	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36
3	6	9	12	15	18	21	24	27
2	4	6	8	10	12	14	16	18
1	2	3	4	5	6	7	8	9

(例) ア～エで、上から3番目、左から2番目の、□で囲まれた4つの数の和は、 $6 + 24 + 14 + 56 = 100$

(証明)

ア～エで、上から m 番目、左から n 番目の数を m と n で表すと、

アは mn ,

イは $m(10-n)$,

ウは

解答欄

証明の続き

【問7】

表は、上の段には1から100までの整数を、下の段には100から1までの整数を左から順に並べたものである。

1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
100	99	98	97	96	...	4	3	2	1

このとき、次の問い(1)・(2)に答えよ。

(京都府 2002 年度)

(1) 1から100までの整数の和は上の表を利用して次のように求めることができる。

縦に並ぶ2つの数を1組とすると、どの組もその2つの数の和は101である。
 この表には、これが100組あるから、
 $101 \times 100 = 10100$
 これは、1から100までの整数の和の2倍であるから、1から100までの整数の和は、
 $10100 \div 2 = 5050$
 答 5050

この考え方をういて、1から1000までの整数の和を求めたい。

次の の中にある空欄 (あ) (い) (う) に当てはまる数をそれぞれ答えよ。

1から1000までの整数を、前の表のように2段に並べたとする。このとき、縦に並ぶ2つの数の和は (あ) であり、これが1000組あるから、1から1000までの整数の和は、
 $\text{あ} \times 1000 \div \text{い} = \text{う}$
 答 (う)

(2) 表のように、横、縦に2つずつ隣り合う4つの数を、 で囲み、この4つの数を、

a	b
c	d

 とする。

1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
100	99	98	97	96	...	4	3	2	1

いま、表の中のある部分を、 で囲むと、 $ac - bd = 50$ となった。このときの a に当てはまる数を求めよ。

解答欄

(1)	あ	
	い	
	う	
(2)	$a =$	

【問8】

1から9までの整数を書いたカードが1枚ずつある。この9枚のカードをよくきって、同時に3枚を取り出し、書かれている数を、大きい方から順に a, b, c とする。記号 $\langle a, b, c \rangle$ は、その3つの数を並べてつくることのできる3けたの整数のうち、一番大きな数と一番小さな数の差を表すものとする。

例えば、3つの数が大きい方から順に 8, 5, 2 であったとき、 $\langle 8, 5, 2 \rangle$ は、 $\langle 8, 5, 2 \rangle = 852 - 258 = 594$ となる。このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2002 年度)

問1. $\langle 9, 6, 4 \rangle$ を計算しなさい。

問2. $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えのうち、最大の数はいくらになるか求めなさい。

問3. $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えは 99 の倍数になることを、次のように証明した。

~ にあてはまる式を書きなさい。

証明

3つの整数 a, b, c ($a > b > c$) において、

$$\langle a, b, c \rangle = (100a + 10b + c) - (\text{ア})$$

$$= \text{イ} - 99c$$

$$= 99(\text{ウ}) \text{ となる。}$$

ここで、 は整数なので、 $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えは 99 の倍数である。

問4. $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えが 297 となった。このようになる3つの整数 a, b, c ($a > b > c$) の組は、全部で何組あるか求めなさい。

解答欄

問1		
問2		
問3	ア	
	イ	
	ウ	
問4	組	

【問9】

図をみてピアノを弾き、それを3回繰り返した。このとき、ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ドのそれぞれの音を弾いた順番をあの表にまとめた。次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2002 年度)

図

ド レ ミ ファ ソ ラ シ ド ド シ ラ ソ ファ ミ レ ド

1 2 3 4
番 番 番 番
目 目 目 目

表	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
	1	2	3	4	5	6	7	8
	16	15	14	13	12	11	10	9
	17	18	19	20	21	22	23	24
	32	31	30	29	28	27	26	25
	33	34	35	36	37	38	39	40
	48	47	46	45	44	43	42	41

(1) 上の表で、ある自然数 n を使って表される4つの数 $n, n+1, n+10, n+11$ が、

$n+1$	$n+1$
$n+10$	$n+11$

 のように並んでいる部分がある。このような部分を1つ見つけ、そのときの n の値を求めなさい。

(2) 上の表で、自然数 a, b, c, d が、

a
b
c
d

 のように縦に並んだ4つの数の組について考えると、すべての組に

ついて、 $(a+d)-(b+c)=0$ という関係がある。このことを、 c は a を使った式で表し、 d は b を使った式で表して説明しなさい。

解答欄

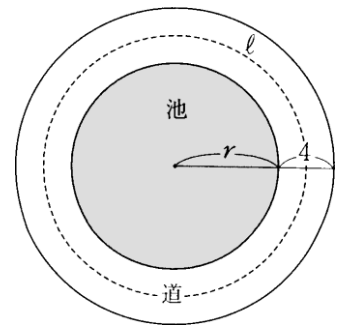
(1)	$n=$
(2)	説明

【問 10】

図のように、半径 r m の円形の池の周囲に、幅 4 m の道がついている。この道の面積を S m²、道のまん中を通る円周の長さを ℓ m とすると、 $S = 4\ell$ となる。

下の の中にあてはまる式を記入し、 $S = 4\ell$ となることの証明を、 の中に完成せよ。ただし、円周率は π のまま用いること。

(福岡県 2002 年度)



(証明) 道の面積 S を、 r を使った式で表すと、

$$S = \pi (\text{ })^2 - \pi r^2 \text{ である。}$$

この式の右辺を計算すると、

解答欄

問題中の解答欄に記載

【問 11】

A 中学校の近くの文房具店では、1組3冊のノートと、1組5冊のノートを販売しています。1組3冊のノートを x 組、1組5冊のノートを y 組買うとき、ノートの合計冊数は $3x+5y$ で表されます。表は、その x, y の値とそのときの合計冊数との関係を表したもので、例えば $\boxed{14}$ は、 $x=3, y=1$ のときの合計冊数が 14 であることを示しています。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2003 年度)

問1. 表の $\boxed{ア}$ にあてはまる数を求めなさい。

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	10	15	20		
1	3	8	13	18			
2	6	11	16		ア		
3	9	14					
4	12						
5							
6							

問2. 合計冊数が 28 となるときの x, y の値の組を2つ求めなさい。

ただし、 x, y はいずれも自然数とします。

問3. 表の合計冊数を表す数のうち、縦横に隣り合う4つを $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ とするとき、例のように、 $a+d$ と $b+c$ の値は等しく

なります。表の中(x, y の値を除く)では、どこでも $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ の $a+d$ と $b+c$ の値が等しくなりますが、そのわけを

文字を使った式で説明しなさい。

例 $a=8$ のとき	
$\begin{matrix} 8 & 13 \\ 11 & 16 \end{matrix}$	$a+d=8+16$ $b+c=13+11$

解答欄

問1		
問2	$x=$, $y=$	$x=$, $y=$
問3	説明	

【問 12】

下のように、自然数を順に6個ずつ横に並べた。次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

(秋田県 2003 年度)

	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6
(1行目)	1	2	3	4	5	6
(2行目)	7	8	9	10	11	12
(3行目)	13	14	15	16	17	18
(4行目)	19	20	21	22	23	24
(5行目)	25	26	27	28	29	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1) 花子さんは、気づいたことを次のように説明した。

この説明が正しくなるように、①、②にあてはまる数を書きなさい。

n 行目の5列目の数を a として、次のような表にしました。

n	1	2	3	4	5	……
a	5	11	17	23	29	……

この表から、 n の値が 1 ずつ増加すると、対応する a の値は ① ずつ増加し、 $n=30$ のとき、 $a=$ ② となることがわかります。

(2) 2003 は何行目の何列目にあるか、書きなさい。

(3) 太郎さんは、「どの行でも、1列目の数と2列目の数の和は 3 の倍数となる」ことに気づき、このことを次のように証明した。①にはあてはまる式を書き、②には証明の続きを書いて、証明を正しく完成させなさい。

[証明]

n 行目の1列目の数は ① となり、

②

よって、 $3 \times (\text{自然数})$ となり、3 の倍数となる。

解答欄

(1)	①	
	②	
(2)	行目の 列目	
(3)	①	
	②	

【問 13】

ある月のカレンダーを見ていた春子さんと良男さんは、カレンダーの中の5つの数を右の図のような形に囲んでみたところ、次のことを見つけた。

日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

〔春子さんの見つけたこと〕

どこを囲んでも、5つの数の和は5の倍数になる。

〔良男さんの見つけたこと〕

どこを囲んでも、縦3つの数の和と横3つの数の和は等しくなる。

〔春子さんの見つけたこと〕または〔良男さんの見つけたこと〕のどちらか一方を選び、それが正しいことを、囲んだ形の中央に位置する数を n として、式を用いて説明しなさい。解答欄の()の中には、選んだ方の名前を書きなさい。

(栃木県 2003 年度)

解答欄

()さんの見つけたこと

【問 14】

図は、1 から順に自然数を5個ずつ並べ、すべての偶数を消したものである。

このとき、

7		9
	13	
17		19

の形で、5つの奇数が入るように取り出し、

a		b
	c	
d		e

とおくとき、

どの部分を取り出した場合でも、等式 $de - ab = 20c$ が成り立つことを証明しなさい。

(石川県 2003 年度)

1		3		5
	7		9	
11		13		15
	17		19	
21		23		25
	27		29	

解答欄

証明

【問 15】

表は、九九の表の一部を取り出したものである。この表の数の間にある関係を調べていた A さんと B さんは、それぞれ次のことに気が付いた。

		かける数								
×		1	2	3	4	5	6	7	8	9
かけられる数	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27

[A さん]

○ で囲んだような縦に並ぶ3つの数では、最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひいた差は、真ん中の数の平方の〔 ① 〕に等しくなる。

[B さん]

⋯ で囲んだような、となり合う2つの偶数をかけたものに 1 を加えると、その2つの偶数の間の奇数の〔 ② 〕に等しくなる。

このとき、次の1, 2に答えなさい。

(山梨県 2003 年度)

- 〔 ① 〕, 〔 ② 〕に当てはまる適切な言葉を書きなさい。
- A さん, B さんのどちらか一方を選び、その人の気付いたことが正しいことを文字式を用いて説明しなさい。ただし、A さんの場合は真ん中の数を, B さんの場合は小さい方の偶数を, それぞれ $2n$ (n は自然数) とすること。
解答欄の〔 〕には、選んだ方を書きなさい。

解答欄

1	①		②	
2	[さん]			

【問 16】

図1は1枚の紙を真ん中で折り、1, 2, 3, 4 とページ番号を書いて、4 ページの左開きの冊子を作ったもので、図2はそれを中央で開いたものである。図3は2枚の紙を重ねて真ん中で折り、1 から順にページ番号を書いて、8 ページの冊子を作ったもので、図4はそれを中央で開いたものである。このように紙の枚数を増やしていく。このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(和歌山県 2003 年度)

問1. 次の(1), (2)に答えなさい。

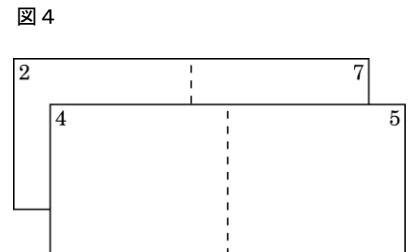
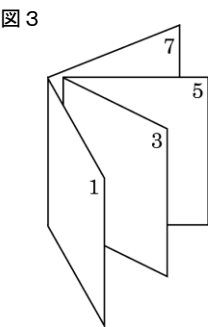
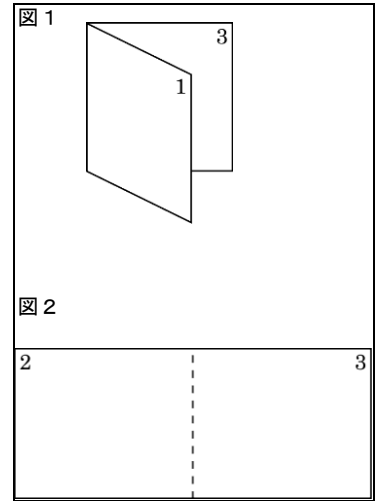
- (1) 下の表は、紙の枚数と、冊子のページ数をまとめたものである。表中の(ア), (イ)にあてはまる数を求めなさい。

紙の枚数	1	2	3		(イ)
冊子のページ数	4	8	(ア)		24

- (2) 次の文中の(ウ)～(オ)にあてはまる式を求めなさい。
 n 枚の紙で冊子を作ると、(ウ)ページの冊子ができる。また、その冊子を中央で開いたとき、左右のページ番号は(エ)と(オ)である。

問2. 図3, 図4のように、2枚の紙で冊子を作ったとき、それぞれの紙の同じ面に書かれている左右のページ番号は、1 と 8, 2 と 7, 3 と 6, 4 と 5 で、どの面も合計は 9 になる。 n 枚の紙で冊子を作ったとき、それぞれの紙の同じ面に書かれている左右のページ番号の合計を n の式で表しなさい。

問3. 20 枚の紙で作った冊子から1枚の紙を取り出したとき、60 というページ番号が書かれていた。その紙に書かれている他の3つのページ番号を求めなさい。



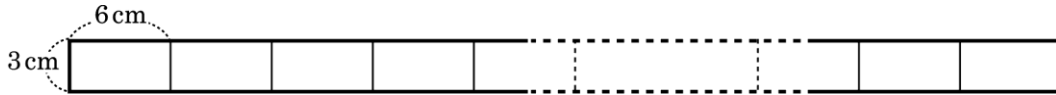
解答欄

問1	(1)	(ア)	
		(イ)	
	(2)	(ウ)	
		(エ)	
		(オ)	
問2			
問3			

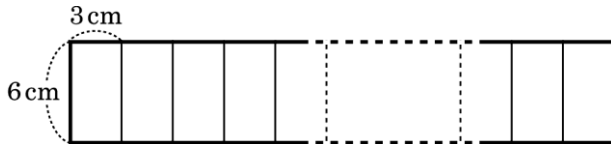
【問 17】

2辺の長さが 3 cm, 6 cm の長方形のタイルがたくさんある。山口さんは、次の図のように、〔A〕, 〔B〕2つのならべ方により、それぞれ同じ枚数のタイルを1列にならべ、ならべてできる図形(太線で示した図形)の面積と周囲の長さを調べた。

〔A〕 3 cm の辺と 3 cm の辺をすきまなくつなぎ合わせる。



〔B〕 6 cm の辺と 6 cm の辺をすきまなくつなぎ合わせる。



次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2003 年度)

(1) ならべてできる図形の面積は、〔A〕, 〔B〕のならべ方によるちがいはない。タイルの枚数が n 枚のとき、その面積を n を使った式で表しなさい。

(2) 山口さんは、タイルの枚数が1~4枚のときについて、ならべてできる図形の周囲の長さを右の表のようにまとめ、〔A〕, 〔B〕のならべ方による周囲の長さの差が 6 でわり切れると予想した。

タイルの枚数が n 枚のとき、ならべてできる図形の周囲の長さを、〔A〕, 〔B〕それぞれについて n を使った式で表し、その差が 6 でわり切れることを説明しなさい。

周囲の長さ (単位:cm)

枚数 ならべ方	周囲の長さ (単位:cm)			
	1 枚	2 枚	3 枚	4 枚
〔A〕	18	30	42	54
〔B〕	18	24	30	36
差	0	6	12	18

解答欄

(1)	cm ²
(2)	説明

【問 18】

「差が 4 である2つの整数において、大きい方の整数の2乗から小さい方の整数の2乗をひいた数は、8 でわりきれ
る」ことの証明を、 の中に完成せよ。

(福岡県 2003 年度)

解答欄

(証明) 小さい方の整数を n とする。

【問 19】

2けたの自然数と、その自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数との和は、11 の倍数になる。このわけを、もとの自然数の十の位の数を x 、一の位の数を y として説明せよ。

(鹿児島県 2003 年度)

解答欄

説明

【問 20】

1けたの自然数 a, b, c を1つずつ書いたカードが3枚ある。この3枚のカードを $\boxed{a} \boxed{b} \boxed{c}$ と並べた場合は、百の位が a 、十の位が b 、一の位が c の3けたの整数を表すものとする。いま、 $\boxed{a} \boxed{b} \boxed{c}$ 、 $\boxed{b} \boxed{c} \boxed{a}$ 、 $\boxed{c} \boxed{a} \boxed{b}$ の3けたの整数を3個つくる。この3個の整数の和が 1221 になるとき、 $a+b+c$ の値を求めなさい。


(秋田県 2005 年度)

解答欄

【問 21】

太郎さんと花子さんは、下のようなかけ算九九の表を見て、次のことに気がついた。

		かける数								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
かけられる数	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

の部分の8は、かけられる数が4、かける数が2で、 4×2 の値を表している。

太郎さんが気づいたこと

表の中で、(例1)のように、横に隣り合う3つの数を四角の枠で囲むとき、枠で囲まれた3つの数の和は、まん中の数の3倍になる。

(例1)

6	9	12
---	---	----

 のとき、 $6+9+12=9 \times 3$

花子さんが気づいたこと

表の中で、(例2)のように、縦、横2個ずつ並んだ4つの数を四角の枠で囲むとき、枠で囲まれた左上の数と右下の数の和から、右上の数と左下の数の和を引くと1になる。

(例2)

10	15
12	18

 のとき、 $(10+18)-(15+12)=1$

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(茨城県 2005 年度)

- (1) 太郎さんが気づいたことを使って、かけ算九九の表の中に、横に隣り合う3つの数の和が60の倍数になる四角の枠は何個できるか求めなさい。
- (2) 花子さんは気づいたことを次のように証明した。①、②、③にはあてはまる式を、④には証明の続きを書いて、証明を正しく完成させなさい。

(証明)

縦、横2個ずつ並んだ4つの数を四角の枠で囲む。枠で囲まれた左上の数のかけられる数を a 、かける数を b とする。

このとき左上の数は ab 、右上の数は ①、左下の数は ②、右下の数は ③ と a, b を使って表せるから、

④

したがって、枠で囲まれた左上の数と右下の数の和から、右上の数と左下の数の和を引くと1になる。

解答欄

(1)	個	
(2)	①	
	②	
	③	
	④	

【問 22】

表は、「かけ算九九の表」の一部である。表中の $\boxed{10}$ の 10 は、かけられる数が 2、かける数が 5 のときの 2×5 の値を表している。この表中の $\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 9 \\ \hline 8 & 12 \\ \hline \end{array}$ のような 4 つの整数の組 $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$ について考える。このとき、 $(a+d)-(b+c)$ の値はつねに 1 になる。このことを、 a は、かけられる数が m 、かける数が n であるものとして説明しなさい。

		かける数					
		1	2	3	4	5	6
かけられる数	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36

(栃木県 2005 年度)

解答欄

説明

【問 23】

ある自然数を 10 で割ったときの商から余りの2倍を引いた数が 7 の倍数であった。このとき、この自然数は 7 の倍数であることを説明しなさい。

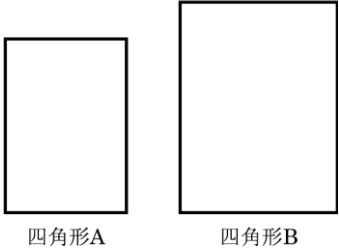
(群馬県 2005 年度)

解答欄

【問 24】


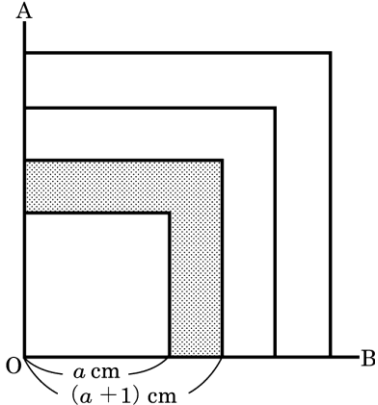
ある中学校の数学の授業で、次の問題を皆で考えた。次の各問に答えよ。

(東京都 2005 年度)

<p>皆で考えた問題</p> <p>a, b を正の数とする。</p> <p>図1で、四角形 A は長方形であり、直角をはさむ2辺の長さは a cm, b cm である。</p> <p>四角形 B は長方形であり、直角をはさむ2辺の長さは、四角形 A の直角をはさむ2辺の長さをそれぞれ 1 cm ずつ長くしたものである。</p> <p>四角形 A の周の長さ と 四角形 B の周の長さを比べなさい。</p>	<p>図 1</p>  <p>四角形A 四角形B</p>
--	--

問1. [皆で考えた問題]で四角形 B の周の長さから、四角形 A の周の長さをひくと何 cm か。

Sさんは、[皆で考えた問題]をもとにして、次の問題をつくった。

<p>Sさんの問題</p> <p>図2で、$\angle AOB = 90^\circ$ である。</p> <p>a を正の数として、1辺の長さが a cm の正方形を、直角をはさむ2辺が $\angle AOB$ の2辺 OA, OB とかさなるようにつくる。</p> <p>1辺の長さが $(a+1)$ cm, $(a+2)$ cm, $(a+3)$ cm の正方形を、それぞれの正方形の直角をはさむ2辺が $\angle AOB$ の2辺 OA, OB とかさなるように、順につくる。</p> <p>1辺の長さが $(a+1)$ cm の正方形から1辺の長さが a cm の正方形を除いた残りの  で示した図形の面積を P cm² とする。</p> <p>同様に1辺の長さが $(a+2)$ cm の正方形から1辺の長さが $(a+1)$ cm の正方形を除いた残りの図形の面積を Q cm², 1辺の長さが $(a+3)$ cm の正方形から1辺の長さが $(a+2)$ cm の正方形を除いた残りの図形の面積を R cm² とする。</p> <p>このとき、$P+R=2Q$ となることを確かめなさい。</p>	<p>図 2</p> 
--	--

問2. [Sさんの問題]で、 P, Q, R をそれぞれ a を使って表し、 $P+R=2Q$ となることを証明せよ。

解答欄


問1	cm
問2	<p data-bbox="213 284 671 360">証明 P, Q, Rをそれぞれ a を使って表すと,</p> $P+R=2Q$


【問 25】

図のように、横 50 段たて 50 列のマス目に、次の【規則】により、整数を1つずつ書き入れる。


【規則】

- 1段目のマス目には左から順に、1から 50 までの整数を順に書き入れる。
- 2段目のマス目には左から順に、2から 51 までの整数を順に書き入れる。
- 3段目のマス目には左から順に、3から 52 までの整数を順に書き入れる。
- 以下同様にして、各段のマス目に整数を順に書き入れていき、50 段目のマス目には左から順に、50 から 99 までの整数を順に書き入れる。

この【規則】により整数を書き入れたマス目から、 の形ができるように5つのマス目を選ぶ。それら5つのマス目に書き入れられている整数のうち、最も小さい整数を n とするとき、次の各問いに答えなさい。

なお、図中の  のように5つのマス目を選んだ場合は、 $n=4$ となる。


(三重県 2005 年度)

(1) $n=4$ となる5つのマス目の選び方は、右の図の  もふくめて全部で何通りあるか、求めなさい。

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	-----	50 列 目
1 段目	1	2	3	4	-----	50
2 段目	2	3	4	5	-----	51
3 段目	3	4	5	6	-----	52
4 段目	4	5	6	7	-----	53
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50 段目	50	51	52	53	-----	99

(2) n がとる値の範囲は、 $2 \leq n \leq$ である。 にあてはまる整数を、求めなさい。

(3)  の形をつくる5つのマス目に書き入れられている整数の和が 5 の倍数になることを n を用いて説明しなさい。

(4)  の形をつくる5つのマス目に書き入れられている整数の和が、400 になるような5つのマス目の選び方は全部で何通りあるか、求めなさい。

解答欄

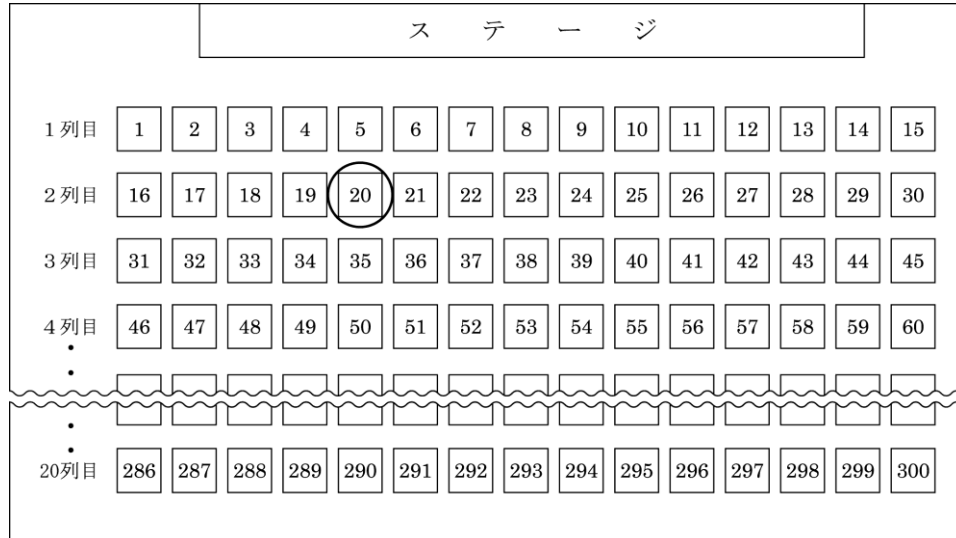
(1)	通り
(2)	
(3)	説明
(4)	通り

【問 26】

図1は、ある学校説明会の座席表である。会場には、横に 15 人、縦に 20 人、合計 300 人が座れるように座席番号を付けたいすを並べている。座席の位置は、ステージに向かって「前から何列目の左から何番目」と表すものとする。例えば、図中の座席番号 20 の位置は「前から2列目の左から5番目」となる。次の(1)～(4)に答えなさい。

(徳島県 2005 年度)

図1



(1) 座席番号 95 の位置は、「前から何列目の左から何番目」になるか答えなさい。

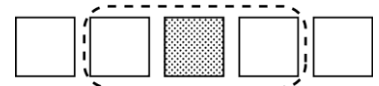
(2) 次の表は、ステージに向かって左端の座席番号を、1列目から順に並べて書いたものである。

前から n 列目 ($1 \leq n \leq 20$) の左端の座席番号を、 n を使って表しなさい。

前から何列目	1	2	3	4	...	20
座席番号	1	16	31	46	...	286

(3) 図2のように、横に並んだ3つのいすに付けられた座席番号の数の和が、474 になるとき、真ん中の座席は「前から何列目の左から何番目」になるか、答えなさい。

図2

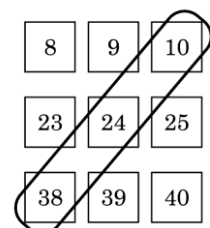


(4) 図3は、前の座席表の一部である。図のように、斜めに並んだ3つの座席番号については、次のことが言える。

どの場所でも、「右上の座席番号」と「左下の座席番号」の数の和は、「真ん中の座席番号」の数の2倍である。

このことを、文字の式を使って説明しなさい。

図3



解答欄

(1)	前から	列目の左から	番目
(2)			
(3)	前から	列目の左から	番目
(4)	説明		

【問 27】

「連続する3つの奇数において、最も大きい奇数とまん中の奇数の和の2乗から最も小さい奇数とまん中の奇数の和の2乗をひいた数は、16 でわりきれぬ」ことの証明を、 の中に完成せよ。

(福岡県 2005 年度)

解答欄

(証明)

整数 n を使って、最も小さい奇数を $2n-1$ とする。

【問 28】

次の 内の先生と生徒の会話を読んで、次の①、②の問いに答えなさい。

(大分県 2005 年度)

先生： 1 の位の数が 5 である 2 けたの自然数の 2 乗を、簡単に求める方法について考えてみましょう。
たとえば、 $15^2=225$, $25^2=625$, $35^2=1225$, $45^2=2025$ になりますね。このことから、何か気がつくことがありますか？

生徒： 答えを $2 \overline{) 225}$, $6 \overline{) 625}$, $12 \overline{) 1225}$, $20 \overline{) 2025}$ のように、十の位と百の位の間に線をひいて 2 つの部分に分けてみると、右側は、すべて 25 です。

先生： 左側はどうですか？ 表にまとめてみてください。

生徒： 表にまとめると、

2乗する自然数の 10 の位の数	1	2	3	4
答の左側	2	6	12	20

となります。

先生： 答えの左側にはどのような規則性がありますか？

生徒： $2=1 \times 2$, $6=2 \times 3$, $12=3 \times 4$, $20=$ となっています。

先生： それでは、2乗する自然数の 10 の位の数が n の場合、答えの左側はどうなりますか？

生徒： $n \times ($ $)$ になると考えられます。

先生： そのとおりです。そして、右側は 25 でしたね。
つまり、10 の位の数が n 、1 の位の数が 5 である 2 けたの自然数の 2 乗は、
 $\times n \times ($ $) + 25$ と表すことができるのですよ。

① ~ に適する式または数を記入しなさい。

② 部が正しいことを、式の計算を使って証明しなさい。

解答欄

①	ア	
	イ	
	ウ	
②	証明	

【問 29】

「九九の表」の 81 個の整数の中で縦横に隣り合う 4 個の数を \square で囲み $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする。

たとえば表の $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ は, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を $a=2, b=4, c=3, d=6$ となるように選んだものである。

このとき, 次の 1~3 の問いに答えなさい。

(鹿児島県 2005 年度)

1. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を, a, b, c がそれぞれ 5 の倍数となるように選ぶとき, d には
てはまる数を書け。

		かける数								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
かけられる数	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

2. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ をどこに選んでも, a, b, c, d についていえることとして, 次の例1, 例2などがある。

例1	a, b, c, d の中で, a がもっとも小さく, d がもっとも大きい。
例2	$a+d$ から $b+c$ をひくと 1 になる。

このように, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ をどこに選んでも, a, b, c, d についていえることを, 例1, 例2以外に2つ見つけそれぞれ書け。

3. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の a は, かけられる数を m , かける数を n とすると $a=mn$ と表される。このとき, 次の(1), (2)の問いに答えよ。

(1) d を m, n を用いて表せ。

(2) 2の例2が成り立つわけを m, n を用いて説明せよ。

解答欄

1	$d=$	
2	①	
	②	
3	(1)	$d=$
	(2)	説明

【問 30】

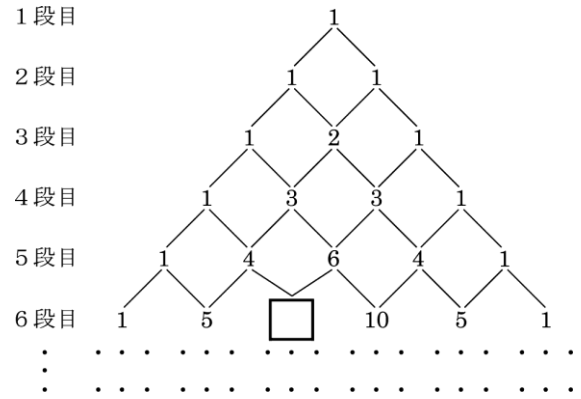
図のように数が並んでいる。数の並びの規則性に着目して次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2005 年度)

問1. にあてはまる数を求めなさい。

問2. 7段目のすべての数の和を求めなさい。

例えば, 4段目のすべての数の和とは $1+3+3+1$ であるから 8 となる。



問3. n 段目のすべての数の和が 1024 であるとき n を求めなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	$n=$

【問 31】

自然数 1, 2, 3, … を 1 から 1 つずつ、左から順番に、どの行も同じ個数となるように、縦と横の位置をそろえながら書き並べていきます。図は、1 つの行に 8 個ずつ自然数を書き並べたもので、• は数字を省略したものです。

このように自然数を書き並べたとき、図の太線で囲まれたような、縦に並ぶ 3 つの数について、あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2007 年度)

- (1) 1 つの行に 8 個ずつ自然数を書き並べたとき、縦に並ぶ 3 つの数で、最も小さい数の平方と真ん中の数の平方との和が、最も大きい数の平方と等しくなりました。このときの真ん中の数を求めなさい。

1 行目	1	2	3	4	5	6	7	8
2 行目	9	10	11	12	13	14	15	16
3 行目	17	18	19	20	21	22	23	24
⋮	25	26	•	•	•	•	•	•
	•	•	•	•	•	•	•	•

- (2) 1 つの行に n 個ずつ自然数を書き並べたとき、どの縦に並ぶ 3 つの数についても、最も小さい数と真ん中の数の積と、最も大きい数と真ん中の数の積との平均は、真ん中の数の平方になります。そのわけを文字式を使って説明しなさい。ただし、 n は自然数とします。

解答欄

(1)	
(2)	説明

【問 32】

春美さんのクラスでは、表のような、1 から 36 までの自然数を、上から下へ 6 つずつ、左から右へ、順に書き並べた表をもとにして、この表の中に並んでいる数について、どんなきまりがあるか調べる学習をした。次は、その学習をしたときの、授業の場面である。あとの問いに答えなさい。

(山形県 2007 年度)

表

1	7	13	19	25	31
2	8	14	20	26	32
3	9	15	21	27	33
4	10	16	22	28	34
5	11	17	23	29	35
6	12	18	24	30	36

<授業の場面>

先生：例 1 の 1, 7, 13 や 9, 15, 21 のように、表で、横に並んでいる 3 つの自然数に着目するとき、この 3 つの自然数の間で常に成り立つこととして、どんなことがありますか。

春美：はい。横に並んでいる 3 つの数の和は、常に真ん中の数の 倍になります。

先生：そうですね。では、例 2 の 1, 2, 7, 8 や 4, 5, 10, 11 のように、縦、横 2 つずつ正方形の形に並んでいる 4 つの自然数に着目すると、4 つの自然数の間で常に成り立つこととして、どんなことがありますか。

明子：はい。右上と左下の数の和と左上と右下の数の和は、常に等しくなります。

先生：そうですね。そのほかに何かありますか。

一郎：右上と左下の数の積から左上と右下の数の積を引くと常に一定の数 6 になります。

先生：なるほど。それでは、一郎さんの述べたことが常に成り立つかどうか、文字式を使って確かめてみましょう。

(1) にあてはまる数を、書きなさい。

(2) 春美さんは、一郎さんの述べた、下線部のことが常に成り立つことを、文字式を使って下のように証明した。

~ にはあてはまる文字式をそれぞれ書き には証明のつづきを書いて証明を完成させなさい。

例 1

1	7	13
---	---	----

9	15	21
---	----	----

例 2

1	7	4	10
2	8	5	11

<証明>

正方形の形に並んだ 4 つの自然数のうち、左上の数を n とすると、左下の数は , 右上の数は , 右下の数は と表される。このとき、右上と左下の数の積から、左上と右下の数の積を引くと、

したがって、常に一定の数 6 になる。

解答欄

(1)	ア				
(2)	イ		ウ		エ
	オ				

【問 33】

A さん、B さん、C さんの 3 人は、自然数の計算について次のように考えました。

A さんは連続する 2 つの自然数の計算から、次のことに気づきました。

連続する 2 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 1 をひくと、

$$1^2 + 2^2 - 1 = 4 = 1 \times 2 \times 2$$

$$2^2 + 3^2 - 1 = 12 = 2 \times 3 \times 2$$

$$3^2 + 4^2 - 1 = 24 = 3 \times 4 \times 2$$

⋮

となり、連続する 2 つの自然数の積を 2 倍した数になるんじゃないかな。

B さんは、A さんが気づいたことを次のように証明しました。

(証明)

連続する 2 つの自然数を n , $n+1$ とすると、

$$n^2 + (n+1)^2 - 1 = n^2 + n^2 + 2n + 1 - 1$$

$$= 2n^2 + 2n$$

$$= 2n(n+1)$$

となり、連続する 2 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 1 をひくと、連続する 2 つの自然数の積を 2 倍した数になる。

さらに、C さんは連続する 3 つの自然数の計算から、次のことに気づきました。

連続する 3 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 2 をひくと、

$$1^2 + 2^2 + 3^2 - 2 = 12 = 2^2 \times 3$$

$$2^2 + 3^2 + 4^2 - 2 = 27 = 3^2 \times 3$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 - 2 = 48 = 4^2 \times 3$$

⋮

となり、連続する 3 つの自然数のまん中の数を 2 乗して 3 倍した数になりそうだ。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(茨城県 2007 年度)

1. A さんや B さんが考えたことを使って、連続する 2 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 1 をひくと 420 になる 2 つの自然数を求めなさい。

2. C さんが気づいたことについて証明を完成させなさい。

解答欄

1	と
2	<p>(証明)</p> <p>となり, 連続する 3 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 2 をひくと, 連続する 3 つの自然数のまん中の数を 2 乗して 3 倍した数になる。</p>

【問 34】

3, 4, 5 や 5, 6, 7 のような, 奇数から始まる連続する 3 つの整数の和は 6 の倍数になる。このことを文字を使った式を用いて説明しなさい。

(栃木県 2007 年度)

解答欄

説明

【問 35】

ある中学校の数学の授業で、次の問題を皆で考えた。次の各問に答えよ。

(東京都 2007 年度)

皆で考えた問題
連続する 4 つの整数を、小さい方から順に、 a, b, c, d とする。
 $b \times d - a \times c$ の値と $a + b + c + d$ の値の関係を調べてみよう。

皆で考えた問題で Sさんは、 $b \times d - a \times c$ の値を x 、 $a + b + c + d$ の値を y として、連続する 4 つの整数 a, b, c, d が、0, 1, 2, 3 の場合、3, 4, 5, 6 の場合、6, 7, 8, 9 の場合について、 x の値と y の値をそれぞれ計算した。その結果、Sさんは、 y は x に比例すると考え、 x と y の関係を次の式で表した。Sさんの比例するという考えと、表した式は正しかった。

〈Sさんの表した式〉

$$y = \boxed{}$$

問1. 〈Sさんの表した式〉の $\boxed{}$ に当てはまる式を書け。

Tさんは、[皆で考えた問題]をもとにして、次の問題をつくった。

Tさんがつくった問題
連続する 4 つの整数を、小さい方から順に、 a, b, c, d とする。
 $P = c \times d - a \times b$
 $Q = a + b + c + d$
とすると、 $P = Q$ となることを確かめなさい。

問2. [Tさんがつくった問題]で、 b, c, d をそれぞれもつとも小さい整数 a を使って表し、 $P = Q$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	
問2	<p>証明 b, c, dをそれぞれもつとも小さい整数 aを使って表すと、</p> <p style="text-align: center;">$P = Q$</p>

【問 36】

表の中の

5	7
6	8

 のような、4 つの自然数の組

a	b
c	d

 につ

いて考える。

このとき、 $bc - ad$ の値が常に 2 となることを、 b, c, d をそれぞれ a を使って表して証明しなさい。

(富山県 2007 年度)

	1	2	3	4	5	6	7	...
列目	列目	列目	列目	列目	列目	列目	列目	...
1 行目	1	3	5	7	9	11	13	...
2 行目	2	4	6	8	10	12	14	...
3 行目	3	5	7	9	11	13	15	...
4 行目	4	6	8	10	12	14	16	...
5 行目	5	7	9	11	13	15	17	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

解答欄

証明

したがって、 $bc - ad$ の値は常に 2 となる。

【問 37】

正の奇数 N を N 個加えた和を M とするとき、 $M-1$ は 4 の倍数であることを、文字式を使って説明せよ。

(香川県 2007 年度)

解答欄

説明

【問 38】

2けたの正の整数がある。その十の位の数と一の位の数を入れかえてできる2けたの整数は、もとの整数の2倍より1小さい。また、もとの整数の一の位の数より2大きい数を3で割ると、割り切れて、商がもとの整数の十の位の数と等しくなる。もとの整数の十の位の数を x 、一の位の数を y として、連立方程式をつくり、それを解いてもとの整数を求めよ。

(愛媛県 2007 年度)

解答欄

もとの整数の十の位の数を x 、一の位の数を y とすると、

【問 39】

表は、1 行目に左から順に 1, 2, 3, 4, 5, 6 を記入し、1~6 列目のそれぞれの列に上から順に 2 ずつ大きくなる整数を記入していくものであり、5 行目まで記入されている。6 行目以降も続けていくものとする。

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	5 列 目	6 列 目
1 行目	1	2	3	4	5	6
2 行目	3	4	5	6	7	8
3 行目	5	6	7	8	9	10
4 行目	7	8	9	10	11	12
5 行目	9	10	11	12	13	14
6 行目						

右の

2	5	8
---	---	---

 に位置している 2, 5, 8 や

7	10	13
---	----	----

 に位置している 7, 10, 13

のように、「表の

--	--	--

 に位置している 3 つの整数において最も大きい整数と真ん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数は、9 でわり切れる」ことの証明を、文字を使って の中に完成せよ。

(福岡県 2007 年度)

解答欄

証明

だから、3 つの整数において、最も大きい整数と真ん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数は、9 でわり切れる。

【問 40】

a を一の位の数字が0でない2けたの自然数とし、 b を a の十の位の数字と一の位の数字を入れかえた2けたの自然数とします。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2008 年度)

(1) $a=15$ のとき、 $5a+4b$ の値を求めなさい。

(2) a の十の位の数字を x 、一の位の数字を y とします。ただし、 x と y は 1 から 9 までの整数とします。

次の①, ②の問いに答えなさい。

① a と b を、それぞれ x と y を使った式で表しなさい。

② $5a+4b$ は 9 の倍数になります。そのわけを、①で表した式を利用して説明しなさい。

解答欄

(1)			
(2)	①	$a=$	$b=$
	②	わけ	

【問 41】

a を一の位の数字が0でない2けたの自然数とし、 a の十の位の数字を x 、一の位の数字を y とします。 b を a の十の位の数字と一の位の数字を入れかえた2けたの自然数とします。ただし、 x と y は1から9までの整数とします。次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2008 年度)

(1) $10a - b$ は9の倍数になります。そのわけを、文字式を使って説明しなさい。

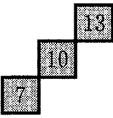
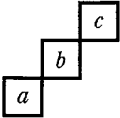
(2) $10a - b = 792$ が成り立つ a の値のうち、もっとも大きい値を求めなさい。

解答欄

(1)	わけ
(2)	

【問 42】

表は、自然数がある規則に従って並べたものの一部である。

表の中の  のような、3 つの自然数の組  について

考える。このとき、 $bc - a^2$ の値は 9 の倍数になることを、 a を用いて説明しなさい。

1	5	9	13	17	21	25	29
2	6	10	14	18	22	26	30
3	7	11	15	19	23	27	31
4	8	12	16	20	24	28	32

(栃木県 2008 年度)

解答欄

【問 43】

ある中学校の数学の授業で、S さんがつくった問題を皆で考えた。次の各問に答えよ。

(東京都 2008 年度)

S さんがつくった問題

連続する 3 つの自然数を考え、小さい方から順に 2 つの自然数の和を求める式を左辺、残りの 1 つの自然数を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 1 番目の等式とする。

次に、1 番目の等式の左辺と右辺の自然数の個数が 1 つずつ増えるように、連続する 5 つの自然数を考え、小さい方から順に 3 つの自然数の和を求める式を左辺、残りの 2 つの自然数の和を求める式を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 2 番目の等式とする。

さらに、2 番目の等式の左辺と右辺の自然数の個数が 1 つずつ増えるように、連続する 7 つの自然数を考え、小さい方から順に 4 つの自然数の和を求める式を左辺、残りの 3 つの自然数の和を求める式を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 3 番目の等式とする。

このとき、1 番目の等式、2 番目の等式、3 番目の等式は次のようになる。

1+2=3 …1 番目の等式
 4+5+6=7+8 …2 番目の等式
 9+10+11+12=13+14+15 …3 番目の等式

同様に、4 番目以降の等式をつくることができる。5 番目の等式をつくってみよう。

問1. [S さんがつくった問題]で、5 番目の等式において、連続する自然数のうち、もっとも小さい自然数と、もっとも大きい自然数をそれぞれ求めよ。

先生は、[S さんがつくった問題]をもとにして、次の問題をつくった。

先生がつくった問題

連続する 3 つの自然数を考え、小さい方から順に 2 つの自然数をそれぞれ 2 乗した和を求める式を左辺、残りの 1 つの自然数の 2 乗を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 1 番目の等式とする。1 番目の等式は $3^2+4^2=5^2$ となる。

次に、1 番目の等式の左辺と右辺の自然数の個数が 1 つずつ増えるように、連続する 5 つの自然数を考え、小さい方から順に 3 つの自然数をそれぞれ 2 乗した和を求める式を左辺、残りの 2 つの自然数をそれぞれ 2 乗した和を求める式を右辺とし、両辺が等しくなる場合を 2 番目の等式とする。2 番目の等式をつくってみよう。

T さんは、[先生がつくった問題]で、2 番目の等式を次の形の式で表し、□ の中に連続する 5 つの自然数を当てはめた。T さんの答えは正しかった。

<T さんの答え>

$$\square^2 + \square^2 + \square^2 = \square^2 + \square^2$$

問2. <T さんの答え>の □ に当てはまる自然数のうちもっとも小さい自然数を求めよ。

ただし、もっとも小さい自然数を n とおき、解答欄には答えだけではなく、答えを求める過程がわかるように途中の式や計算なども書け。

【問 44】

数学の授業で、カレンダーを用いて、次の手順①～⑥で 4 つの数に○をつけ、○をつけたその数の和を調べる学習をした。

- ① カレンダーの日付の数のうち、縦、横に 4 つずつ並んでいる 16 個の数を枠で囲む。
- ② 枠の中のどれか 1 つの数に○をつける。
- ③ ○をつけた数を含む縦の列と横の列にある数で、○をつけた数以外のすべての数に×をつける。
- ④ 枠の中でまだ○や×がついていない数のうち、どれか 1 つの数に○をつける。
- ⑤ 新たに○をつけた数を含む縦の列と横の列にある数で、○や×のついていないすべての数に×をつける。
- ⑥ 枠の中のすべての数に○や×がつくまで、④、⑤をくり返す。

次の文は、その授業での先生と生徒の会話の一部である。
この会話を読み、あとの問1～問3に答えなさい。

(新潟県 2008 年度)

先生： 手順①で、図 1 のとおり、16 個の数を枠で囲むことにします。次に、各自で、手順②から⑥にしたがって、作業をしてください。4 つの数に○がつきましたね。○をつけた数の和を計算してください。
皆さんの答えは ですね。

友子： 先生、合っています。どうして○をつけた数を見ないのに、答えがわかったのですか。

香里： 私は友子さんとは違う数に○をつけましたが、答えは同じになりました。

先生： 実は、枠で囲む数のうち、一番左上の数がわかれば、○をつけた数を見なくても、その数の和がわかるのです。その理由を考えていきましょう。
例えば、図 1 の枠で囲んだ数を、図 2 のように、ます目の中を書くことにします。ます目の中へ書かれた数は、どのような規則で並んでいますか。

陽子： それぞれの横の列では、右に 1 つ進むごとに 1 ずつ大きくなり、それぞれの縦の列では、下に 1 つ進むごとに ずつ大きくなっています。

先生： そうですね。枠で囲む数が変わったときにどうなるか、ます目の一番左上の数を n として調べてみましょう。
陽子さんの答えたことをもとにして考えると、図 3 のます目に入る数は、すべて n を使って表すことができますね。図 3 の一番左の縦の列に入る 4 つの数の和を A とするとき、 A を、 n を使って表すと、どうなりますか。

正行： 一番左の縦の列に入る数を順に n を使って表し、その 4 つの数の和 A を求めると $A = \text{ウ}$ になります。

先生： そうですね。次に、手順にしたがって○をつけた 4 つの数の和を B として、 A と B の関係を調べましょう。
図 3 の横の列ごとにみていくと、○をつけた数は、それぞれの横の列に 1 つずつありますね。4 つの横の列ごとに、それぞれ○をつけた数と、その列の一番左の数との差を調べると、 B は A を使って、 $B = \text{エ}$ と表せることがわかります。

健太： ということは、○をつけた 4 つの数の和 B は、枠の中の一番左上の数 n によって決まりますね。

先生： そのとおりです。さらに、○をつけた 4 つの数の和は、枠の中の一番左上の数と一番右下の数の和の 2 倍に等しくなります。
このことを使って、○をつけた数の和を言い当てたのです。

秀平： そうすれば○をつけた 4 つの数を見なくても、それらの和が簡単にわかりますね。

図 1

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

図 2

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

図 3

n			

問1. , に当てはまる数を, それぞれ答えなさい。

問2. , に当てはまる式を, それぞれ答えなさい。

問3. 下線部分について, このことが成り立つことを, n を用いて証明しなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	
	エ	
問3	証明	

【問 45】

表 1 は、自然数を 1 から順に横に 5 つずつ書き並べていったものである。この表で、上から m 番目で左から n 番目の数を、 m, n を用いて表しなさい。

(静岡県 2008 年度)

表 1

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

解答欄

【問 46】

「連続する 4 つの整数において、最も大きい整数と 2 番目に大きい整数の積から最も小さい整数と 2 番目に小さい整数の積をひいた数は、これらの連続する 4 つの整数の和に等しい」ことの証明を、文字を使って の中に完成せよ。

(福岡県 2008 年度)

解答欄

(証明)

だから、連続する 4 つの整数において、最も大きい整数と 2 番目に大きい整数の積から最も小さい整数と 2 番目に小さい整数の積をひいた数は、これらの連続する 4 つの整数の和に等しい。

【問 48】

次の文は、ある中学校の生徒 2 人の会話の一部である。この文を読んで、下の問1, 問2に答えなさい。

(新潟県 2009 年度)

A さん: 2 けたの自然数を思い浮かべてみて。その 2 けたの数を当ててみせるよ。

B さん: じゃあ、やってみて。

A さん: 例えば、君が 28 を思い浮かべたとするよ。その数を 100 倍した数 2800 と、思い浮かべた数の十の位の数と一の位の数を入れ替えた数 82 を足すと、2882 になるね。こんなふうには、4 けたの数を作ってほしいんだ。まず、28 以外の 2 けたの自然数を思い浮かべてみて。

B さん: 思い浮かべたよ。

A さん: 次に、思い浮かべた数を 100 倍した数と、思い浮かべた数の十の位の数と一の位の数を入れ替えた数を足して、4 けたの数を作ってください。

B さん: できたよ。

A さん: その 4 けたの数は 11 の倍数になるんだ。その 4 けたの数を 11 で割った商を X とするよ。X の十の位の数と一の位の数を教えて。

B さん: 十の位の数は で、一の位の数は 7 だよ。

A さん: 君が思い浮かべた数は、75 だね。

B さん: そのとおり。でも、どうしてわかったの。

A さん: 実は、思い浮かべた数の十の位の数と、X の一の位の数は同じなんだ。

B さん: じゃあ、一の位の数はどうしてわかったの。

A さん: 君が教えてくれた X の十の位の数と一の位の数を足すと になるね。X の十の位の数と一の位の数の和を Y とすると、思い浮かべた数の一の位の数と、Y の一の位の数は同じなんだよ。

問1. , に当てはまる数を、それぞれ答えなさい。

問2. 思い浮かべた数がどんな 2 けたの自然数であっても、A さんが話した方法で、その数を言い当てることができる。このことを確かめるために、思い浮かべた数の十の位の数を a 、一の位の数を b として、次の(1)~(3)の問いに答えなさい。

(1) 下線部分 I の手順で 4 けたの数を作ると、その数はどのように表すことができるか、 a 、 b を用いて表しなさい。

(2) 下線部分 I の手順で 4 けたの数を作ると、その数は 11 の倍数になることを、 a 、 b を使って説明しなさい。

(3) 下線部分 II、III について、このことがそれぞれ成り立つことを、 a 、 b を使って説明しなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	(1)	
	(2)	説明
	(3)	説明

【問 49】

図 1 は花子さんが大学生の兄の太郎さんと交わした会話の一部を示したものであり、図 2 は花子さんが太郎さんに見せたノートの記述である。これらを読んで、問 1～問 3 に答えなさい。

(岡山県 2009 年度)

図 1

お兄ちゃん、3けたの正の整数で、下2けたの数が4の倍数のとき、もとの整数は4の倍数になっているよね。そのわけを文字を使って説明してみただけど、このノートを見てくれない？

良くできているよ。では、7の倍数については知っているかい。
3けたの正の整数で、百の位の数を2倍した数と下2けたの数との和が7の倍数のとき、もとの整数は7の倍数になっているんだよ。
 例えば 147 では、
 $2 \times 1 + 47 = 49$
 となるし、581 では、同じように計算すると、
 となり、7の倍数になっているから、
 もとの整数の 147 や 581 は 7 の倍数となっていることがわかるんだ。
 このわけも文字を使って説明することができるよ。

図 2

「3けたの正の整数で、下2けたの数が4の倍数ならば、もとの整数は4の倍数である」
 ことの説明
 (説明)
 もとの3けたの正の整数の百の位の数を a 、
 十の位の数を b 、一の位の数を c とすると、
 もとの整数は、
 $100a + 10b + c \dots\dots\dots (1)$
 と表される。
 また、仮定から、 n を整数とすると、
 $10b + c = 4n \dots\dots\dots (2)$
 と表すことができる。
 このとき、(1)、(2) から、
 $100a + 10b + c = 100a + 4n$
 $= 4(25a + n)$
 となる。
 $25a + n$ は整数だから、もとの整数は
 4の倍数である。

問1. n を整数とするとき、必ず 3 の倍数となるのは、次の(1)～(5)のうちではどれですか。

- (1) $2n+3$ (2) $3n+4$ (3) $4n+6$ (4) $5n+6$ (5) $6n+9$

問2. 図 1 の に適当な数を書き入れなさい。

問3. 太郎さんは下線部で「3けたの正の整数で、百の位の数を2倍した数と下2けたの数との和が7の倍数ならば、もとの整数は 7 の倍数である」と述べている。このことが成り立つわけの説明を、解答欄の書き出しに続けて書き、完成させなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	<p>(説明)</p> <p>もとの 3 けたの正の整数の百の位の数を a, 十の位の数を b, 一の位の数を c とすると, もとの整数は,</p> $100a + 10b + c \cdots \textcircled{1}$ <p>と表される。</p>

【問 50】

連続する3つの整数があり、中央の数は3の倍数である。これら3つの整数のうち、最小の数をM、最大の数をNとすると、 $MN+1$ は9の倍数であることを、文字式を使って証明せよ。

(香川県 2009 年度)

解答欄

証明

【問 51】

円すい A と円すい B がある。円すい B の底面の半径は円すい A の底面の半径の 3 倍であり、円すい B の高さは円すい A の高さの $\frac{1}{3}$ 倍である。円すい A の体積を V 、円すい B の体積を W とすると、 $W=3V$ となることの証明を、
の中に完成せよ。ただし、円周率は π を用いて表すこと。

(福岡県 2009 年度)

解答欄

証明

円すい A の底面の半径を r 、円すい A の高さを h とする。

【問 52】

次の(1), (2)に答えよ。

(長崎県 2009 年度)

(1) 十の位の数が m , 一の位の数 が 6 である 2 けたの自然数を n とするとき, n の倍数正方形において, E が 0 になることを次のように説明した。□(ア) □ ~ □(ウ) □ にあてはまる式を入れよ。

ただし, □(ア) □ には n の式を, □(イ) □ , □(ウ) □ には m の式を入れること。

n の倍数正方形には, 全部で □(ア) □ 個の数が並んでいるので, E は $n \times (\square(ア) \square)$ の一の位の数である。
 n は十の位の数 が m , 一の位の数 が 6 であるので, $n = \square(イ) \square$ と表され, $n \times (\square(ア) \square)$ は, m の式で $10 \times (\square(ウ) \square)$ と表される。□(ウ) □ は整数だから, $10 \times (\square(ウ) \square)$ は 10 の倍数である。したがって, E は 0 になる。

(2) 十の位の数 が m , 一の位の数 が 5, 6 と連続する 2 つの 2 けたの自然数について, それぞれの自然数の倍数正方形にある 0 の個数を順に S, T とする。このとき, S+T の値を m の式で表せ。

解答欄

(1)	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
(2)	S+T=	

【問 53】

ある連続する 3 つの自然数があり、その和を 4 で割ると 2 余る。このような連続する 3 つの自然数の組のうちで、その和が 50 に最も近くなるときの、3 つの自然数を求めなさい。

(熊本県 2009 年度)

解答欄

--	--	--

【問 54】

花子さんは、メモに書いた式を見て、「連続する 3 つの自然数では、もっとも小さい自然数ともっとも大きい自然数の積に 1 を加えると、中央の自然数の 2 乗に等しくなる」と予想した。この予想がいつでも成り立つことを、もっとも小さい自然数を n として証明しなさい。

(青森県 前期 2010 年度)

花子さんのメモ

2, 3, 4 の場合	$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2$
3, 4, 5 の場合	$3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$
6, 7, 8 の場合	$6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$
11, 12, 13 の場	$11 \times 13 + 1 = 144 =$

解答欄

[証明]

【問 55】

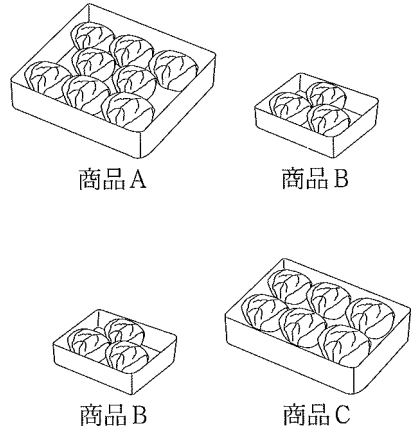
数学の授業で、次の【課題】が出されました。□内は、課題の 1 を考えている《1 班》と、課題の 2 へ進んだ《2 班》の生徒と先生の会話です。あとの問1, 問2に答えなさい。

(宮城県 2010 年度)

【課題】ある和菓子屋では、500 個の桜もちを販売する予定です。

1 8 個入りの商品 A を何箱かと 3 個入りの商品 B を何箱か作り、桜もちの総数を 500 個になるようにします。和菓子屋では、①箱の数の合計が最も少なくなるようにしたいと思っています。このとき、箱の数の合計について考えなさい。

2 3 個入りの商品 B と 6 個入りの商品 C とでは、それぞれの箱の数をどのようにしても、②桜もちの総数を 500 個にできません。そのわけを考えなさい。



商品A 商品B
商品B 商品C

《1 班》

先生:何か気づいたことはありますか。

生徒:桜もちの総数が 500 個になるのは、例えば、商品 A が 10 箱と商品 B が 140 箱のときや、商品 A が 40 箱と商品 B が ア 箱のときで、それぞれの場合では、箱の数の合計が異なります。

先生:そうですね。箱の数の合計について、他に気づいたことはありますか。

生徒:商品 A の箱の数が増えると、商品 A と商品 B の箱の数の合計が減るという関係があるようです。

先生:なるほど。その考え方を使ってみるとよいですね。

《2 班》

生徒:商品 A と商品 B では桜もちの総数を 500 個にできたのに、商品 B と商品 C ではできないのはなぜかな。どう考えればよいのだろう。

先生:商品 B が x 箱と商品 C が y 箱あるとき、箱に入っている桜もちの総数は何個になりますか。

生徒:はい。 x と y を使った式で表すと イ (個) になります。

先生:500 にならないわけは、その式を利用して考えるとみえてきますよ。

問1 課題の 1 について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) ア にあてはまる数を求めなさい。

(2) 下線部①のとき、商品 A と商品 B の箱の数の合計が何箱になるか求めなさい。

問2 課題の 2 について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) イ にあてはまる x と y を使った式を答えなさい。

(2) 下線部②のようになるわけを文字式を用いて説明しなさい。

解答欄

問1	(1)	ア	
	(2)	箱	
問2	(1)	イ	
	(2)		

【問 56】

連続する4つの整数を小さい方から順に a, b, c, d とするとき、 $bc - ad$ の値はつねに2になる。このことを、 a を用いて説明しなさい。

(栃木県 2010 年度)

解答欄



【問57】

次の文は、ある中学校の先生と生徒の会話の一部である。この文を読んで、下の問1～問3に答えなさい。

(新潟県 2010 年度)

先生 : これから配る箱の中には、1 から 7 までの数字が 1 つずつ書かれた 7 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ が入っています。これらをよくかき混ぜてから、3 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた数字を使って 3 けたの整数を作ります。このようにしてできる 3 けたの整数の中で、最も大きい整数から、最も小さい整数を引いたときの値を n とします。

例えば、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{7}$ の 3 枚のカードを取り出して 3 けたの整数を作ったとき、最も大きい整数は 721 で、最も小さい整数は 127 となります。このときの n の値は、 $n=721-127=594$ となります。

それでは、それぞれが 3 枚のカードを取り出して、 n の値を求めてみましょう。

A さん: $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ の 3 枚のカードが出ました。最も大きい 3 けたの整数は $\boxed{\text{ア}}$ で、最も小さい 3 けたの整数は $\boxed{\text{イ}}$ となるから、 $n=$ $\boxed{\text{ウ}}$ です。

B さん: 私は、2 回取り出してみました。1 回目の n の値は、 $n=396$ になりましたが、2 回目の n の値は、 $n=198$ になりました。

先生 : いろいろな n の値があることがわかりましたね。求めた n の値に何か共通していることはありませんか。

C さん: 私も $n=198$ でしたが、先生が求めた $n=594$ も、B さんが求めた $n=396$ も、99 の倍数になっていると思います。

先生 : そうです。Ⅰ n の値は 99 の倍数になっていますね。

B さん、C さんは、 n の値が、同じ $n=198$ となりましたが、結果が同じでも取り出したカードは異なっているかもしれませんね。なぜなら、 n の値が、 $n=198$ となるカードの取り出し方を調べてみると、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ と $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ と $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ と $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ と $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ の 5 通りあるからです。

それでは、B さんが求めた、Ⅱ n の値が、 $n=396$ となるとき、カードの取り出し方は何通りあるか考えてみましょう。

問1 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数を、それぞれ答えなさい。

問2 下線部分Ⅰについて、取り出したカードに書かれた数字を、大きい順にそれぞれ a , b , c とし、 n の値が 99 の倍数となることを、 a , b , c を使って説明しなさい。

問3 下線部分Ⅱについて、カードの取り出し方は何通りあるか、求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	〔説明〕	
問3	通り	

【問 58】

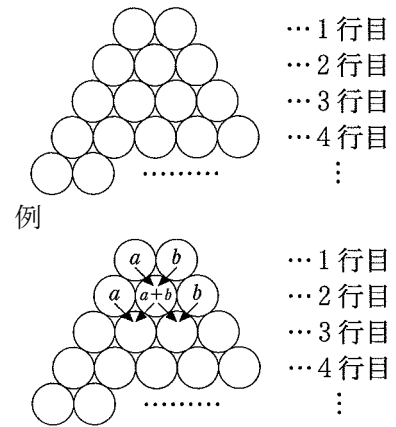
数学の授業で、先生から、次の課題が出された。

課 題

「下のルールに従って、右の図の○の中に自然数を入れたときの規則性を見つけよう」

ルール

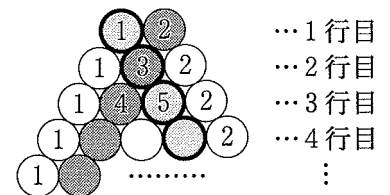
- ア 1 行目の○には、自然数を 1 個ずつ入れる。
- イ 2 行目以降の左端の○には、すべて「1 行目の左の数」を入れ、右端の○には、すべて「1 行目の右の数」を入れる。
- ウ 2 行目以降の両端以外の○には、右の例のように、1 つ上の行で接する 2 つの○に入れた数の和を入れる。



この課題に取り組んでいる太郎さんと花子さんの次の会話を読んで、あとの問いに答えなさい。

(富山県 2010 年度)

- 太郎 まず、1 行目に左から順に 1, 2 を入れた場合について考えてみよう。各行の左から 2 番目の数を 1 行目から順に見ると、規則正しく並んでいるね。
- 花子 右から 2 番目の数も、規則正しく並んでいるよ。
- 太郎 本当だ！そうすると 8 行目の右から 2 番目の数は になるね。
- 花子 各行の左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和には規則性があるのかしら。
- 太郎 1 行目の左から 2 番目の数は 2, 右から 2 番目の数は 1 だから和は 3, 2 行目の左から 2 番目の数は 3, 右から 2 番目の数も 3 だから和は 6, 3 行目の左から 2 番目の数は 4, 右から 2 番目の数は 5 だから和は 9……。
- B どの行についても、左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和は 3 の倍数になっているようだね。
- 花子 C 1 行目の 2 つの自然数が他の場合はどうなるのかしら。



問1 にあてはまる数を求めなさい。

問2 下線Bが成り立つことを、 n 行目の左から 2 番目の数と右から 2 番目の数をそれぞれ n を使った式で表し、説明しなさい。

問3 下線Cについて、1 行目の 2 つの自然数を左から順に a, b として、 n 行目の左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和を n, a, b を使った式で表しなさい。

問4 10 行目の、左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和が 150 になるとき、1 行目の自然数の入れ方は何通りあるか求めなさい。

解答欄

問1		
問2	左から 2 番目	右から 2 番目
	<p>したがって、どの行についても、左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和は 3 の倍数になる。</p>	
問3		
問4	通り	

【問 59】

図のように、1から25までの整数を、1から順に縦に5個ずつ並べる。連続して横に並んだ3個の数を線で囲み、わくの中の3つの数を小さい方から順に a, b, c とする。たとえば $\boxed{7 \ 12 \ 17}$ のわくでは、 $a=7, b=12, c=17$ である。わくをどこにとっても、 a と c との積に25を加えると、和は b^2 になることを証明しなさい。

(岐阜県 2010 年度)

1	6	11	16	21
2	$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	$\boxed{17}$	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25

解答欄

〔証明〕

【問 60】

図は、ある月のカレンダーである。

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

次の問1, 問2に答えなさい。

(山口県 2010 年度)

問1 図の **10 11 12** のように横に並んだ連続する 3 つの数について、和が 72 となるような 3 つの数を求め、小さい順に左から書きなさい。

問2 図の $\begin{matrix} 9 \\ 16 \end{matrix}$ のように縦に並んだ 2 つの数について、上にある数を a 、下にある数を b とするとき、

$6a^2 + b^2$ が 7 の倍数となることを、 b を a を使った式で表して説明しなさい。

解答欄

問1			
問2	〔説明〕		

【問 61】

「連続する 2 つの奇数において、2 つの奇数の積から小さい方の奇数の 2 倍をひいた数は、小さい方の奇数の 2 乗に等しい」ことの証明を、 の中に完成せよ。

(福岡県 2010 年度)

〔証明〕

整数 n を使って、小さい方の奇数を $2n-1$ とする。

解答欄

〔証明〕

整数 n を使って、小さい方の奇数を $2n-1$ とする。

【問 62】

小さい順に並べた連続する 3 つの奇数 3, 5, 7 において, $5 \times 7 - 5 \times 3$ を計算すると 20 となり, 中央の奇数 5 の 4 倍になっている。

このように, 「小さい順に並べた連続する 3 つの奇数において, 中央の奇数と最も大きい奇数の積から, 中央の奇数と最も小さい奇数の積をひいた差は, 中央の奇数の 4 倍に等しくなる」ことを文字 n を使って説明せよ。ただし, 説明は解答用紙の「 n を整数とし, 中央の奇数を $2n+1$ とする。」に続けて完成させよ。

(長崎県 2010 年度)

解答欄

〔説明〕

n を整数とし, 中央の奇数を $2n+1$ とする。

したがって, 小さい順に並べた連続する 3 つの奇数において, 中央の奇数と最も大きい奇数の積から, 中央の奇数と最も小さい奇数の積をひいた差は, 中央の奇数の 4 倍に等しくなる。

【問 63】

次は、健司さんと美咲さんの会話である。これを読んで、次の問1～問3に答えなさい。

(秋田県 2011 年度)

健司 「1 から 9 までの自然数の中から、1 つ思い浮かべてください。
それを A とするよ。」

美咲 「はい。」($A=7$ を思い浮かべる…)

健司 「思い浮かべた A を当ててみせるよ。
それでは、2 けたの自然数 B を何か 1 つ考えて、 A と B の和を求め
てください。」

美咲 「はい。」($B=85$ として、 $A+B$ を求める…)

健司 「次に、 A と B の和から、 B の各位の数の和をひいた結果を、教えて
ください。」

美咲 「 $\textcircled{7}$ です。」

健司 「最初に思い浮かべた自然数 A は、7 ですね。」

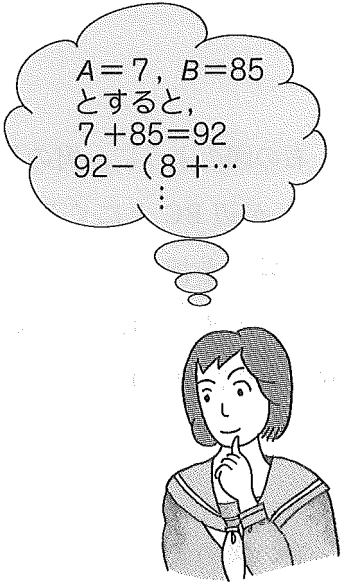
美咲 「どうしてわかったの？」

健司 「2 けたの自然数 B の十の位の数を a 、一の位の数を b とすると、
 $B = \textcircled{1}$ と表すことができる。これから B の各位の数の和をひくと、
 $\textcircled{1} - (a+b) = \textcircled{2}$ となり、 $\textcircled{2}$ は必ず $\textcircled{3}$ の倍数になる。だから、 A と B の和から B の各位の
数の和をひいた結果を S とすると、 B がどんな 2 けたの自然数であっても、 S を
 $\textcircled{3}$ で割ったときの $\textcircled{4}$ から A がわかるんだ。」

美咲 「そうか。それでは、 S が 41 になったときは、 A は $\textcircled{5}$ なのね。」

健司 「そのとおり。だけど、 S から A を当てるこの方法は、 A を 1 から 10 までの自然数から選んでもらうようにす
ると、困ったことが起こるんだ。 A が $\textcircled{6}$ なのか $\textcircled{7}$ なのかの判断がつかなくなってしまうんだ。」

美咲 「そうね。でも、 A を 1 から 9 までの自然数から選んでもらうのであれば、 B が 3 けたの自然数のときも、 S
から A を当てることができるわね。」



問1 2 人の会話の内容が正しくなるように、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{6}$ と $\textcircled{7}$ にはあてはまる数または式を、 $\textcircled{4}$ には適切な言葉を書きなさい。

問2 健司さんは、「判断がつかなくなってしまう」と言っています。このことについて、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) $\textcircled{6}$ 、 $\textcircled{7}$ にあてはまる数を書きなさい。

(2) 判断がつかなくなってしまうのはなぜか、その理由を書きなさい。

問3 美咲さんは、「 A を1から9までの自然数から選んでもらうのであれば、 B が3けたの自然数のときも、 S から A を当てることができる」と言っています。このことの説明と自然数 A の当て方をまとめた内容が正しくなるように、㊦～㊨の に続きを書いて、[美咲さんのレポート]を完成させなさい。ただし、㊩、㊨には数を書きなさい。

[美咲さんのレポート]

1から9までの自然数から選んでもらう数を A ,

3けたの自然数を B ,

A と B の和から B の各位の数の和をひいた結果を S とする。

3けたの自然数 B の百の位の数を a 、十の位の数を b 、一の位の数を c とすると、

㊦

よって、 A は1から9までの自然数なので、

・ S が ㊩ ときは、 A は ㊪ になる。

・ S が ㊫ で割り切れるときは、 A は ㊬ になる。

解答欄

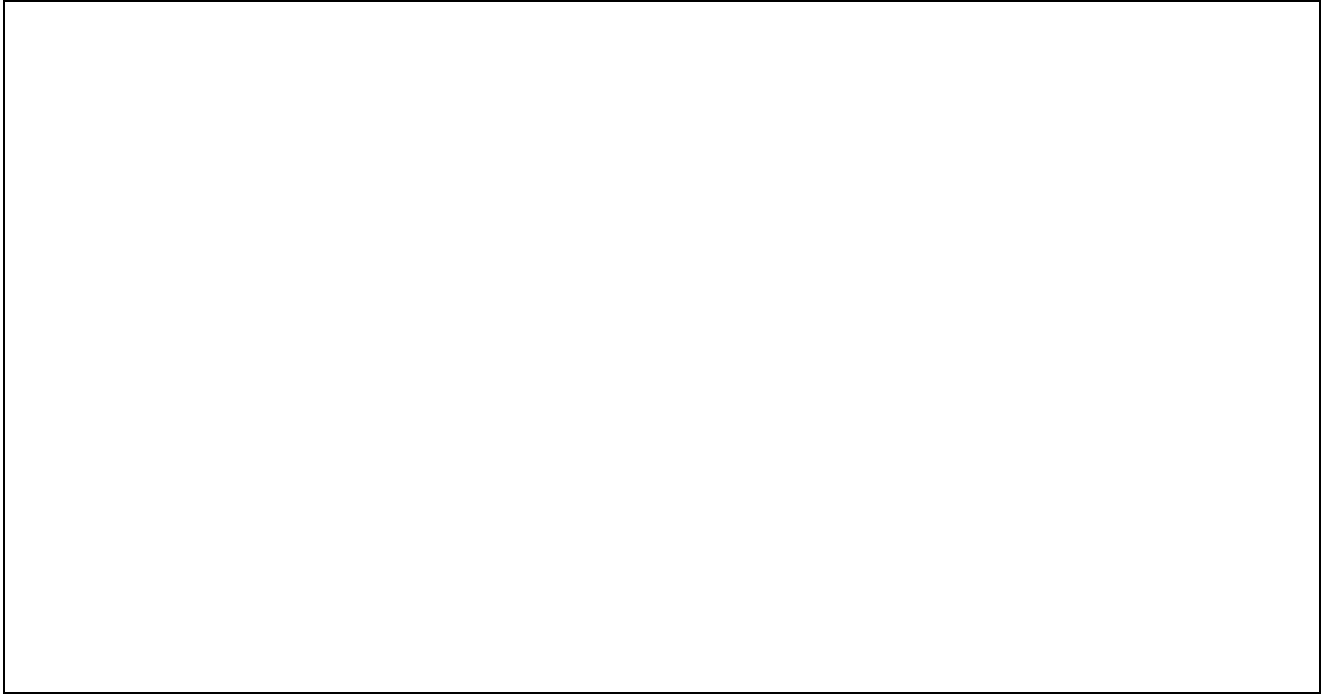
問1	㉞		
	㉟		
	㊱		
	㊲		
	㊳		
	㊴		
問2	(1)	㊵	
		㊶	
	(2)		
問3	㊷		
	㊸		
	㊹		
	㊺		
	㊻		

【問 64】

2, 3, 4 や 5, 6, 7 のような, 中央の数が 3 の倍数である連続する 3 つの整数では, 最も大きい数の 2 乗から最も小さい数の 2 乗をひいた差は, 12 の倍数になる。このことを証明しなさい。

(栃木県 2011 年度)

解答欄



【問 65】

$\sqrt{1+3+5} = \sqrt{9} = 3$ のように、連続する 3 つの奇数の和の平方根が整数となる場合を見つけるため、S さんは、次のような方法を考えました。下の各問に答えなさい。

(埼玉県 前期 2011 年度)

Sさんの考えた方法

<p>n を整数とすれば、連続する 3 つの奇数は、$2n-1$、$2n+1$、$2n+3$ と表される。この 3 つの奇数の和は、 $(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=6n+3=3(2n+1)$ となる。この 3 つの奇数の和の平方根 $\sqrt{3(2n+1)}$ が整数となるので、 $3(2n+1)=3^2 \times (\text{ある数})^2$ と表される。さらに $2n+1$ は奇数なので、(ある数) を小さい数から順に考えると、 $3(2n+1)=3^2 \times 1^2$ これを解くと $n=1$ だから、3 つの奇数は 1、3、5 となる。 $3(2n+1)=3^2 \times 3^2$ これを解くと $n=13$ だから、3 つの奇数は 25、27、29 となる。 $3(2n+1)=3^2 \times 5^2$ これを解くと $n = \boxed{\text{ア}}$ だから、3 つの奇数は $\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$、$\boxed{\text{エ}}$ となる。</p>

問1 $\boxed{\text{ア}}$ ~ $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる数を、それぞれ書きなさい。

問2 連続する 5 つの奇数の和の平方根も、例えば、 $\sqrt{1+3+5+7+9} = \sqrt{25} = 5$ のように整数となる場合があります。 $\sqrt{1+3+5+7+9}$ 以外で最も小さい連続する 5 つの奇数を求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。

解答欄

問1	ア					
	イ		ウ		エ	
問2	[説明]					
	よって、連続する 5 つの奇数は、 $\boxed{\quad}$ 、 $\boxed{\quad}$ 、 $\boxed{\quad}$ 、 $\boxed{\quad}$ 、 $\boxed{\quad}$ となる。					

【問 66】

ある中学校で、Sさんが作った問題をみんなで考えた。次の各問に答えよ。

(東京都 2011 年度)

[Sさんが作った問題]

図1のように、9つの正方形の枠内に文字 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ を書いた表がある。
 図1において、連続する9つの自然数を小さい方から順に、 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ にそれぞれ代入する。
 図2は、図1において、1から始まる連続する9つの自然数をそれぞれ代入した場合を表しており、図3は、図1において、2から始まる連続する9つの自然数をそれぞれ代入した場合を表している。
 図1において、連続する9つの自然数を小さい方から順に、 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ にそれぞれ代入するとき、 $a+e+i=30$ となる e の値を調べてみよう。

a	b	c
d	e	f
g	h	i

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2	3	4
5	6	7
8	9	10

問1 [Sさんが作った問題]で、 $a+e+i=30$ となる e の値を求めよ。

先生は、[Sさんが作った問題]をもとにして、次の問題を作った。

[先生が作った問題]

図1において、 P と Q をそれぞれ、 $P=b \times h + d \times f$ 、 $Q=a \times i + c \times g$ とする。
 図2で、 P と Q はそれぞれ、 $P=2 \times 8 + 4 \times 6 = 40$ 、 $Q=1 \times 9 + 3 \times 7 = 30$ であり、このとき、 $P-Q=10$ となる。また、図3で、 P と Q はそれぞれ、 $P=3 \times 9 + 5 \times 7 = 62$ 、 $Q=2 \times 10 + 4 \times 8 = 52$ であり、このときも、 $P-Q=10$ となる。
 図1において、連続する9つの自然数を小さい方から順に、 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ にそれぞれ代入するとき、連続する9つの自然数がどの数から始まる場合でも、 $P-Q=10$ となることを確かめなさい。

問2 [先生が作った問題]で、 a, b, c, d, f, g, h, i をそれぞれ e を用いて表し、 $P-Q=10$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	
問2	<p>〔証明〕 a, b, c, d, f, g, h, iをそれぞれ e を用いて表すと,</p> <p>$P - Q = 10$</p>

【問 67】

太郎さんは、連続する3つの整数において、最も大きい整数の2乗から、最も小さい整数の2乗をひいた差について調べようと思い、下の表をつくりました。

表

連続する3つの整数	最も大きい整数の2乗から最も小さい整数の2乗をひいた差
3, 4, 5	16
6, 7, 8	<input type="text" value="ア"/>
11, 12, 13	<input type="text" value="イ"/>

次の(1)～(3)に答えなさい。

(島根県 2011 年度)

- (1) 表の中の、 , にあてはまる数を答えなさい。
- (2) この結果から、太郎さんは、次のように予想しました。

[予想]

連続する3つの整数において、最も大きい整数の2乗から、最も小さい整数の2乗をひいた差は、どんなときでも4で割り切れる。

この予想が正しいことを、文字 n を使って説明しなさい。そのとき、解答欄の には、あてはまる言葉や式を書き入れること。

- (3) 連続する3つの整数において、最も大きい整数の2乗から、最も小さい整数の2乗をひいた差が420になるとき、連続する3つの整数を求めなさい。

解答欄

(1)	ア	<input type="text"/>
	イ	<input type="text"/>
(2)	<input type="text"/> を n とすると、連続する3つの整数は <input type="text"/> , <input type="text"/> , <input type="text"/> と表せる。	
(3)	<input type="text"/>	

【問 68】

2 けたの正の整数がある。この整数の十の位の数と一の位の数を入れかえた整数をつくる。もとの整数を 5 倍した数と、もとの整数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる整数を 4 倍した数との和を N とする。このとき、 N は 9 の倍数であることを、文字式を使って証明せよ。

(香川県 2011 年度)

解答欄

〔証明〕

【問 69】

表は、1 から 49 までの奇数を順に並べ、上から 1 段目、2 段目、…、5 段目としたものである。表の 2 段目の 13、23 や 4 段目の 37、47 のように、表の同じ段でとなり合っただんだ 2 つの奇数において、大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は、40 でわりきれることの証明を、文字を使って の中に完成せよ。

(福岡県 2011 年度)

1 段目	1	11	21	31	41
2 段目	3	13	23	33	43
3 段目	5	15	25	35	45
4 段目	7	17	27	37	47
5 段目	9	19	29	39	49

解答欄

〔証明〕

したがって、表の同じ段でとなり合っただんだ 2 つの奇数において、大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は、40 でわりきれり。

【問 70】

下の[表]のように行と列を決め、数字が書かれたカードを並べる。

まず、1 行目の 1 列目から [1], [2], [3], [4] のカードを、2 行目の 2 列目から [5], [6], [7], [8] のカードを、3 行目の 3 列目から [9], [10], [11], [12] のカードを、…というように各行に 4 枚のカードを規則的に並べていく。

このとき、あとの問1～問3に答えなさい。

(佐賀県 前期 2011 年度)

[表]

列 \ 行	1 列目	2 列目	3 列目	4 列目	5 列目	6 列目	7 列目	8 列目	・	・
1行目	[1]	[2]	[3]	[4]						
2行目		[5]	[6]	[7]	[8]					
3行目			[9]	[10]	[11]	[12]				
4行目				[13]	[14]	[15]	[16]			
5行目					・	・	・	・		
6行目						・	・	・	・	
・							・	・	・	・
・								・	・	・

問1 7 行目の 8 列目に置かれるカードの数字を求めなさい。

問2 [40] と書かれたカードは、何行目の何列目に並ぶか、求めなさい。

問3 A さん、B さん、C さん、D さんは[表]について、それぞれ次のようなことに気づいた。

このとき、あとの(1)～(3)の各問いに答えなさい。

ただし、カードの左端、右端とは各行ごとに並べた 4 枚のカードのそれぞれ左端、右端にあるカードを表している。

[気づいたこと] (m は自然数とする)

A さん: カードの右端に書かれた数は、4 で割り切れる数です。また、 m 行目について、カードの左端に書かれた数は、カードの右端に書かれた数より [①] 小さい数になっているので、カードの左端に書かれた数は m を使って表すと、 [②] になることがわかります。

B さん: m を 2 以上とすると、 m 行目について、カードの左端から 2 番目の数を「基準の数」とし、基準の数とその左右の数の 3 つの数の和を m を使って表すと [③] になることがわかります。また、基準の数とその上下の数の 3 つの数の和も [③] になることがわかります。

C さん: B さんが言っている基準の数とその上下左右の数の 5 つの数の和は、基準の数の 5 倍になることがわかります。

D さん: ところで、自然数を 2 乗した数 1, 4, 9, 16, …のうち、偶数の場合はカードの右端にあり、奇数の場合はカードの左端にあることが予想できます。

(1) [気づいたこと]の中の $\boxed{\text{①}}$ ~ $\boxed{\text{③}}$ にあてはまる数または式を求めなさい。

(2) Cさんは、「Bさんが言っている基準の数とその上下左右の数の5つの数の和は、基準の数の5倍になる」と言っている。このことを m を用いた式を使って説明しなさい。

(3) Dさんは、「自然数を2乗した数1, 4, 9, 16, …のうち、偶数の場合はカードの右端にあり、奇数の場合はカードの左端にあることが予想できます。」と言っている。この予想が正しいことを、次の[説明]のようにして示した。

$\boxed{\text{④}}$ ~ $\boxed{\text{⑥}}$ にあてはまる数または式を求めなさい。

[説明]

1, 4, 9, 16, …はそれぞれ $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ であり、

偶数を2乗した数は偶数、奇数を2乗した数は奇数となるので、

2乗する前の数に着目して考える。

・2乗する前の数が偶数のとき

偶数は $2n$ (n は自然数) と表され、偶数を2乗すると、

$$(2n)^2 = 4n^2$$

となり、 n は自然数だから、 n^2 も自然数となり4で割り切れる。

よって、偶数を2乗した数はカードの右端にあることがいえる。… ㉞

・2乗する前の数が奇数のとき

奇数は $\boxed{\text{④}}$ (n は自然数) と表され、奇数を2乗すると、

$$(\boxed{\text{④}})^2$$

$$= \boxed{\text{⑤}} n^2 - \boxed{\text{⑤}} n + 1$$

$$= \boxed{\text{⑤}} (n^2 - n + 1) - \boxed{\text{⑥}}$$

となり、 n は自然数だから、 $n^2 - n + 1$ も自然数となる。

よって、奇数を2乗した数はカードの左端にあることがいえる。… ㉟

㉞ , ㉟ よりすべての自然数について、Dさんの予想が正しいことが説明できる。

解答欄

問1			
問2	行目の		列目
問3	(1)	①	
		②	
		③	
	(2)		
	(3)	④	
		⑤	
⑥			

【問 71】

次の(1), (2)に答えよ。

(長崎県 2011 年度)

(1) 3けたの自然数 723 は、 $100 \times 7 + 10 \times 2 + 1 \times 3$ と表せる。このように、百の位が a 、十の位が b 、一の位が c である 3けたの自然数を、 a, b, c を用いて表せ。

(2) 百の位の数が一の位の数より大きい 3けたの自然数 432 から、その数の百の位の数字と一の位の数字を入れかえてできる数 234 をひくと、その差は 198 となり 99 の倍数になる。

このように、「百の位の数が一の位の数より大きい 3けたの自然数から、その数の百の位の数字と一の位の数字を入れかえてできる数をひくと、その差は 99 の倍数になる」ことを文字を使って説明せよ。

ただし、説明は解答用紙の「もとの 3けたの自然数の百の位を a 、十の位を b 、一の位を c とおき、 a は c より大きいものとする。」に続けて完成させよ。

解答欄

(1)	
(2)	もとの 3けたの自然数の百の位を a 、十の位を b 、一の位を c とおき、 a は c より大きいものとする。

【問 72】

図1のように、 O を頂点とし、底面の半径が r 、母線の長さが $4r$ の円すいがある。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2011 年度)

問1 底面の円周の長さを r の式で表せ。

図1

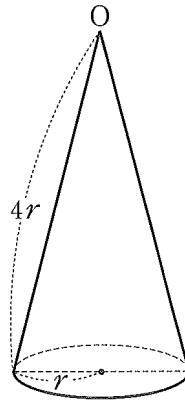
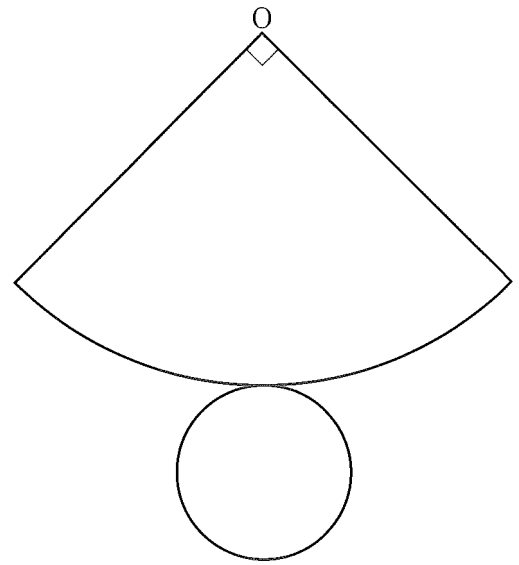


図2



問2 図2は図1の円すいの展開図である。この展開図において、おうぎ形の中心角の大きさが 90° となることを説明せよ。

問3 図3のように、図1の円すいの底面の直径を AB とする。2点 C, D は、それぞれ母線 OA, OB 上にあり、 $AC=BD=a$ である。また、線分 AC, BD の中点をそれぞれ E, F とする。この円すいの側面に、底面に平行で線分 CD を直径とする円の円周となる線をひき、この線で側面を 2 つに分ける。このうち、点 A を含む部分 (図3の \blacksquare で示した部分) の面積を S とする。底面に平行で線分 EF を直径とする円の円周の長さを l とするとき、 $S=al$ となることを証明せよ。なお、図3の円すいの展開図のうち、側面になる部分を図4で示している。

図3

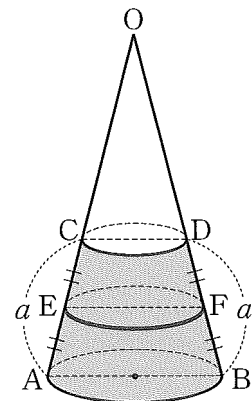
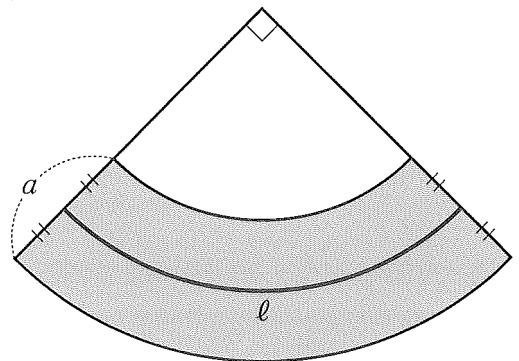


図4



解答欄

問1	
問2	
問3	

【問 73】

貴史君は、『式の計算の利用』の学習の中で、次の連続する 3 つの整数の性質について、その証明を下のように学びました。このとき、下の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(宮崎県 2011 年度)

【連続する 3 つの整数の性質】

もっとも小さい数ともっとも大きい数の積は、まん中の数の 2 乗から 1 をひいた差に等しい。

【証明】

n を整数とし、連続する 3 つの整数を $n-1, n, n+1$ と表す。
このとき、もっとも小さい数ともっとも大きい数の積は、
 $(n-1)(n+1) = \boxed{\text{ア}}$
だから、この積はまん中の数の 2 乗から 1 をひいた差に等しい。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる式をかきなさい。

(2) 貴史君は、連続する 4 つの整数には次のような性質があることを知り、下のように証明しました。

【連続する 4 つの整数の性質】

もっとも小さい数ともっとも大きい数の積は、残りの 2 数の積から 2 をひいた差に等しい。

【貴史君の証明】

イ

だから、この積は残りの 2 数の積から 2 をひいた差に等しい。

このとき、貴史君の証明が正しくなるように、 $\boxed{\text{イ}}$ に証明をかき、完成させなさい。

解答欄

(1)	ア	
(2)	イ	