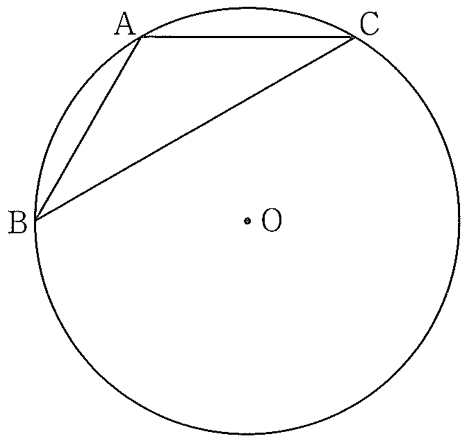
5－8. 平面図形　その他の証明　複合問題ほか　2011年度出題

【問1】

　図のように，半径6 cmの円Oの円周上に3点A，B，Cがあります。AB＝AC，∠ABC＝30°とします。点Dは，点Bを出発して，点Aをふくまない弧BC上を，点Cまで移動します。2点C，D間の距離が最大となるとき，四角形ABDCの面積は$27\sqrt{3}$ cm^{2}であることを説明しなさい。ただし，四角形ABDCの面積を求める式も書きなさい。

（北海道　2011年度）



解答欄

〔説明〕

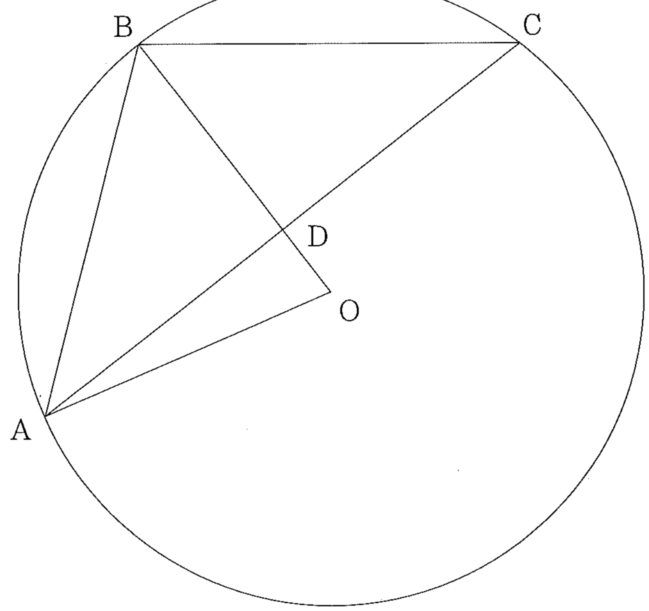
【問2】

図１のような，線分OAを半径とする円Oがあります。円Oの周上に2点B，CをAB＝BC，∠ABC＞90°となるようにとり，三角形ABCをつくります。また，点Oと点Bを結び，線分OBと辺ACとの交点をDとします。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（宮城県　2011年度）

(1)　∠OBA＝∠OBCであることを証明しなさい。

図1

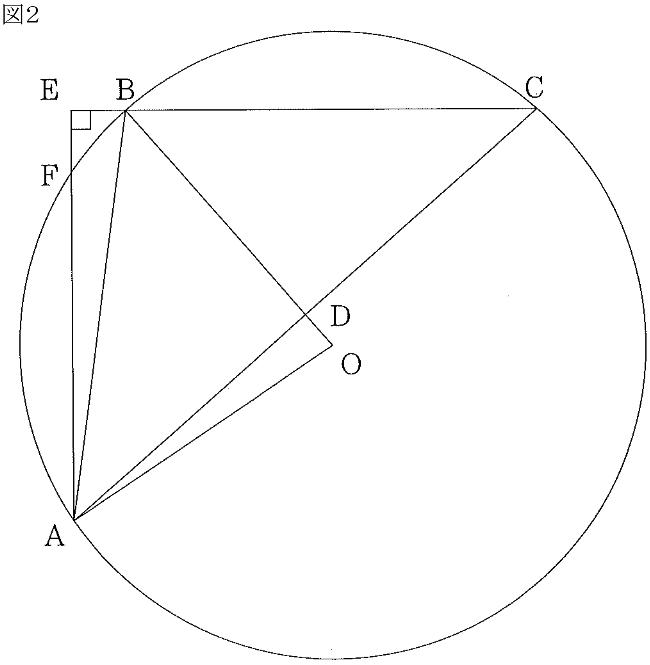


(2)　AB＝4 cm，AC＝6 cmとします。図2は，図1において，辺BCをBの方へ延長した直線上に，点EをCE⊥AEとなるようにとり，点Aと点Eを結んだものです。また，線分AEと円Oとの交点のうち，点A以外の点をFとします。次の①，②の問いに答えなさい。

①　円Oの半径を求めなさい。

②　線分AFの長さを求めなさい。

図2



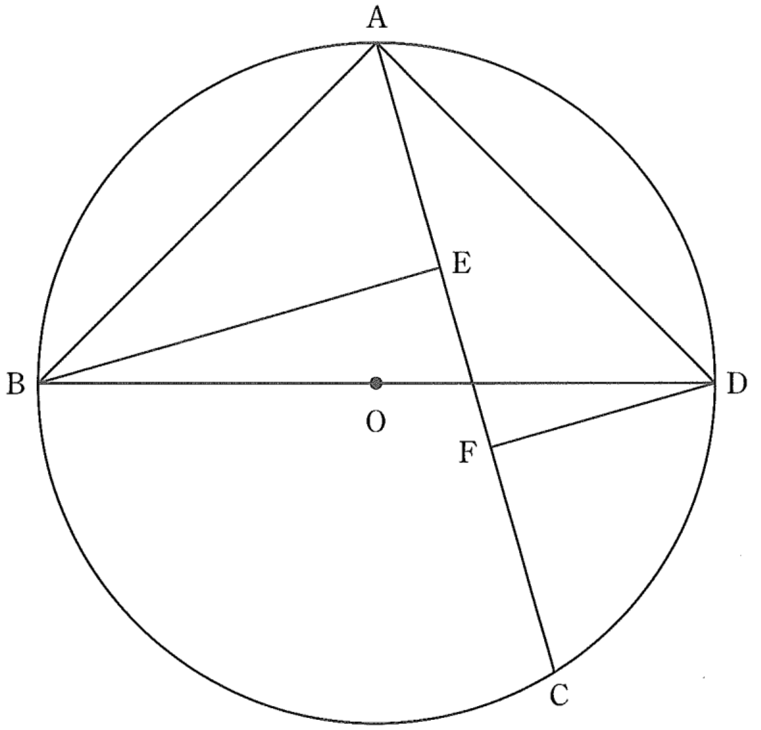
解答欄

(1)	〔証明〕	
(2)	①	cm
	②	cm

【問3】

図において，4点A，B，C，Dは円Oの周上の点で，AB＝ADであり，線分BDは円Oの直径である。また，2点B，Dから線分ACに垂線をひき，ACとの交点をそれぞれE，Fとする。このとき，AE＝DFとなることを証明しなさい。

（福島県　2011年度）



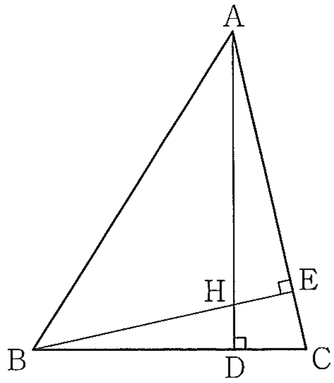
解答欄

〔証明〕

【問4】

∠A＝45°である三角形ABCがある。右の図のように，頂点A，Bからそれぞれ辺BC，ACに垂線をひき，辺BC，ACとの交点をそれぞれD，Eとしたところ，BD＝3 cm，DC＝1 cmとなった。このとき，裕太さんは，合同な三角形や相似な三角形に着目して，三角形ABCの面積を求めることにした。垂線AD，BEの交点をHとして，次の問1～問3に答えなさい。

（群馬県　2011年度）



問1　三角形AEHと三角形BECは合同で，AH＝BCである。このことを，裕太さんは次のように証明した。$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ には適する記号や数値を，〔 あ 〕，〔 い 〕には適する言葉を，それぞれ入れなさい。また，$\boxed{}$ には，∠EAHと∠EBCが等しいことの説明を書き，証明を完成させなさい。

証明

△AEHと△BECにおいて
仮定より，∠AEH＝ $\boxed{ア}$ ＝90°　…①
また，仮定より，∠BAE＝45°，∠AEB＝90°
だから，∠ABE＝ $\boxed{イ}$ °
よって，△EABは〔 あ 〕である。
したがって，AE＝ $\boxed{ウ}$ …②

$\boxed{\phantom{\text{　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　}}}$

したがって，∠EAH＝∠EBC…③
①～③より，
〔 い 〕ので，△AEH≡△BEC
対応する辺の長さは等しいから，
AH＝BC

問2　三角形BDHと相似な三角形をすべて書きなさい。

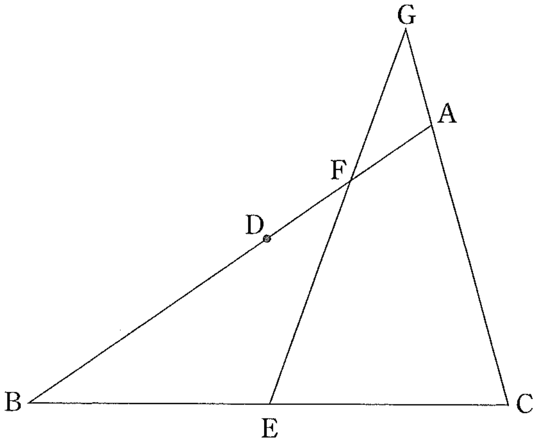
問3　相似な三角形を利用して，線分HDの長さを求めなさい。また，三角形ABCの面積を求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
	㋐	
	㋑	
	〔∠EAHと∠EBCが等しいことの説明〕	
問2		
問3	線分HDの長さ　　cm	
	三角形ABCの面積　　cm^2	

【問5】

図の△ABCにおいて，辺AB上に点Dを，DB＝ACとなるようにとる。辺BCの中点Eと，線分ADの中点Fを結ぶ直線が，辺CAの延長と交わる点をGとすると，△AGFは二等辺三角形になる。次の [ ] の中は，△AGFが二等辺三角形になる証明を，途中まで示してある。



次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県 後期 2011年度）

証明

2点C，Dを結ぶ。

線分CDの中点をHとし，点Hと2点E，Fをそれぞれ結ぶ。

△DBCにおいて，2点E，Hはそれぞれ2辺CB，CDの中点なので，中点連結定理により，

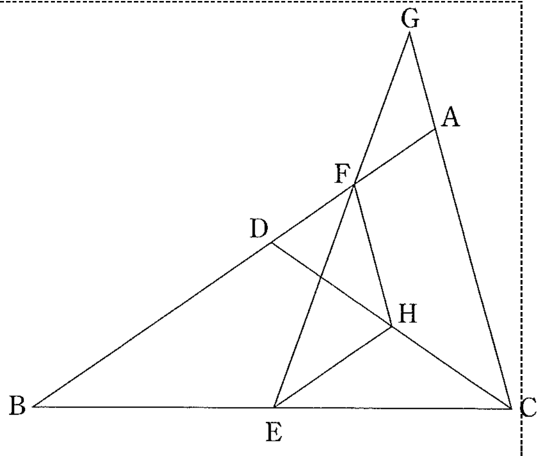
EH [(a)] BD …①

EH＝ [(b)] BD …②

△ADCにおいて，同様に，

[(c)]

したがって，△AGFは二等辺三角形になる。



問1 [(a)] に入る最も適当な記号と，[(b)] に入る数をそれぞれ書きなさい。

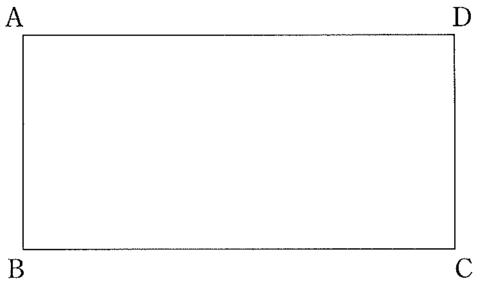
問2 [(c)] に証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし，[ ] の中の①，②に示されている関係を使う場合，番号の①，②を用いてもかまわないものとする。

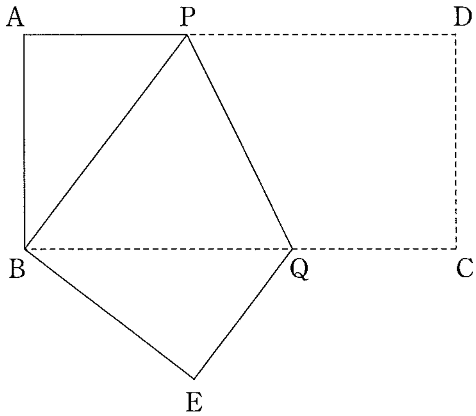
解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(a)</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td>(c)</td><td></td></tr>
</table>

【問6】

図1のような長方形ABCDがある。図2のように，頂点DがBと重なるように折ったときの折り目の線分をPQ，頂点Cが移った点をEとする。





このとき，次の問いに答えなさい。

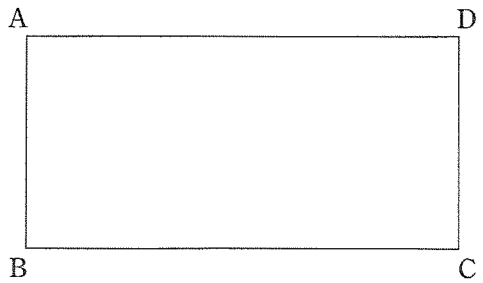
（富山県　2011年度）

問1　折り目の線分PQを図1に作図し，P，Qの記号をつけなさい。ただし，作図に用いた線は残しておくこと。

問2　図2で，△BPQは二等辺三角形であることを証明しなさい。ただし，証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

問3　AP＝3 cm，PD＝5 cmのとき，線分PQの長さを求めなさい。

解答欄

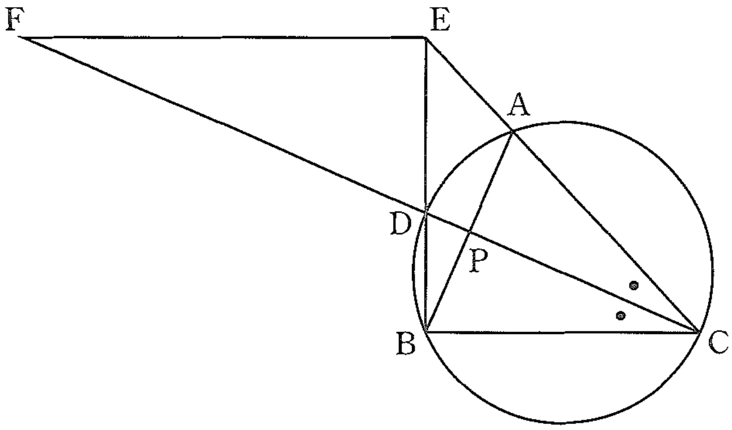
問1	
問2	
問3	cm

【問7】

図のように，円周上に3点A，B，Cがある。∠ACBの二等分線と円周との交点をD，BDを延長した直線とCAを延長した直線との交点をEとおき，点Eを通りBCに平行な直線とCDを延長した直線との交点をFとする。このとき，次の問いに答えよ。

（福井県　2011年度）

問1　線分ABと線分CDの交点をPとするとき，△DEF∽△APCであることを証明せよ。



問2　CA＝CB＝3 cm，AB＝2 cmとする。点Aから線分BCに垂線をひき，線分BCとの交点をHとするとき，線分CHの長さを求めよ。

問3　問2のとき，△DBCと△DEFの面積の比を求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm
問3	(△DBCの面積) : (△DEFの面積)＝　　:

【問8】

直線ℓ上にある点Pを通るℓの垂線をひくために，次のように作図をした。

Ⅰ　点Pを中心とする円をかき，直線ℓとの交点をA，Bとする。
Ⅱ　点A，Bを，それぞれ中心として，等しい半径の2つの円を交わるようにかき，その交点の1つをQとする。
Ⅲ　直線PQをひく。

この直線PQが直線ℓと垂直であることを次のように証明した。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ をうめて証明を完成しなさい。

（愛知県A　2011年度）

〔証明〕

△QAPと△QBPで，
PA＝PB　…①
PQ＝PQ　…②
AQ＝ $\boxed{\text{ア}}$ …③
①，②，③から，3辺が，それぞれ等しいので，
△QAP≡△QBP
よって，∠QPA＝∠ $\boxed{\text{イ}}$ …④
④と，∠QPA＋∠ $\boxed{\text{イ}}$ ＝ $\boxed{\text{ウ}}$ °から，∠QPA＝90°
つまり，PQ⊥ℓ

解答欄

ア（　　），イ（　　），ウ（　　）

【問9】

平行四辺形ABCDで，2点E，Fが対角線BD上にあり，BE＝DFである。ただし，線分BEの長さは線分BFの長さより短いものとする。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを次のように証明したい。(　Ⅰ　)，(　Ⅱ　)，(　Ⅲ　) にあてはまる最も適当なものを，下のアからカまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書きなさい。

（愛知県B　2011年度）

〔証明〕

△AEDと△CFBで，

四角形ABCDは平行四辺形だから，AD＝CB　…①

BE＝DFだから，ED＝FB　…②

AD // BCで，(　Ⅰ　) は等しいから，(　Ⅱ　)　…③

①，②，③から，2辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△AED≡△CFB

合同な三角形では，対応する辺の長さと角の大きさは等しいので，

AE＝CF　…④

(　Ⅲ　)　…⑤

⑤から，(　Ⅰ　) が等しいので，AE // CF　…⑥

④，⑥から，1組の向かいあう辺が，等しくて平行であるので，

四角形AECFは平行四辺形である。

ア対頂角
イ同位角
ウ錯角
エ∠DAE＝∠BCF
オ∠AED＝∠CFB
カ∠ADE＝∠CBF

解答欄

Ⅰ (　　　)，Ⅱ (　　　)，Ⅲ (　　　)

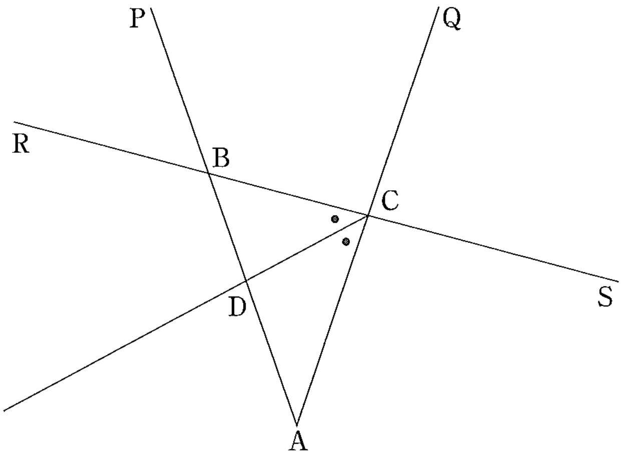
【問10】

図1のように，直線AP，AQがあり，AP上に点Bがある。Bを通る直線RSをひき，AQとの交点をCとする。また，∠ACBの二等分線をひき，APとの交点をDとする。次の問1～問3に答えなさい。

（和歌山県　2011年度）

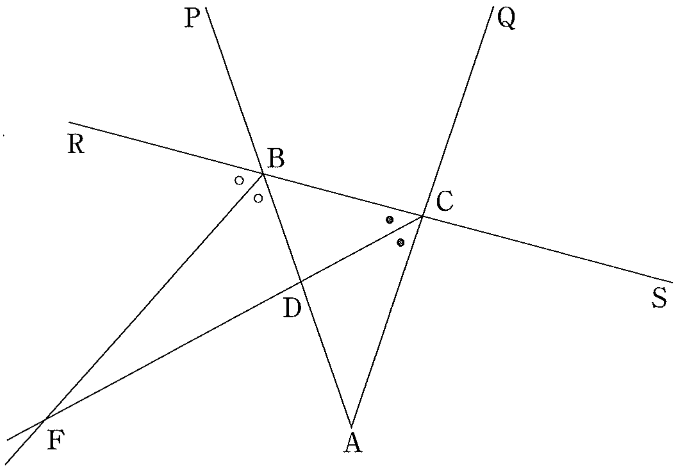
問1　点Aを通り，直線CDに平行な直線をひき，直線RSとの交点をEとする。∠ACB＝86°のとき，∠CAEの大きさを求めなさい。

図1



問2　AC＝9 cm，BC＝6 cm，AD＝6 cmのとき，BDの長さを求めなさい。

図2



問3　図2のように，∠ABRの二等分線をひき，直線CDとの交点をFとする。このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　$\angle BFC = \dfrac{1}{2}\angle BAC$であることを，∠ACB＝∠$a$，∠ABR＝∠$b$として，証明しなさい。

(2)　∠ABCの二等分線上に点Gをとり，4点B，F，G，Cが同じ円周上にあるようにしたい。Gの位置をどのように決めればよいか，説明しなさい。ただし，作図の手順はかかなくてもよい。

解答欄

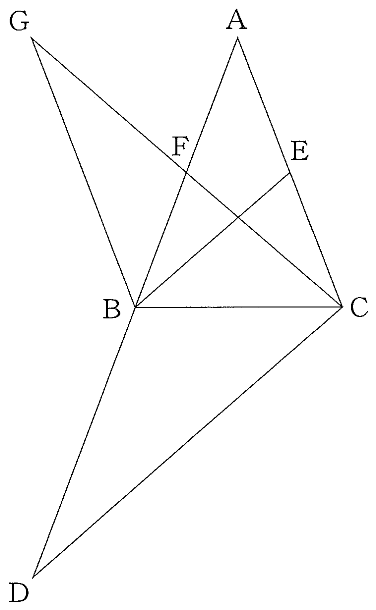
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">∠CAE＝　　　　　　度</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">BD＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔説明〕</td></tr>
</table>

【問11】

図のように，AB＝ACの二等辺三角形ABCがある。辺ABの延長上に，AB＝BDとなる点Dをとり，点Dと点Cを結ぶ。点Bを通り線分DCに平行な直線と，辺ACとの交点をEとする。また，辺ABの中点をFとし，点Bを通り辺CAに平行な直線と，直線CFとの交点をGとする。このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（香川県　2011年度）

問1　△ABE∽△ADC　であることを証明せよ。



問2　GC＝DC　であることを証明せよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

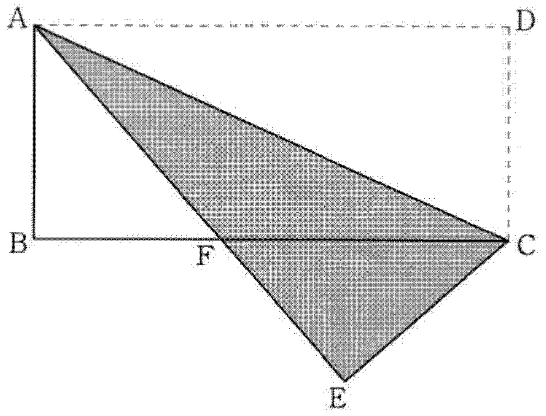
【問12】

図は，AB＜BCである長方形ABCDを，対角線ACを折り目として折り返し，頂点Dが移った点をE，辺BCと線分AEの交点をFとしたものである。このとき，次の問1・問2に答えなさい。

（高知県 前期 2011年度）

問1 三角形AFCは二等辺三角形であることを証明せよ。

問2 AB＝4 cm，BC＝8 cmのとき，点Bと点Eを結んでできる三角形BEFの面積を求めよ。



解答欄

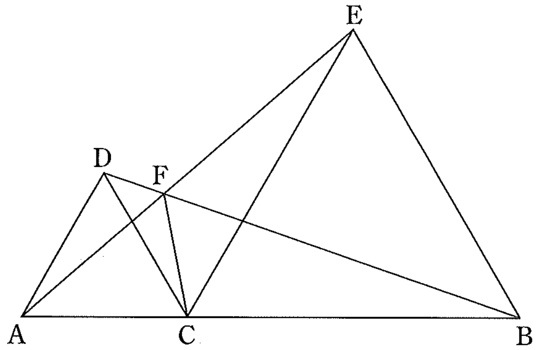
問1	〔証明〕 したがって，三角形AFCは二等辺三角形である。
問2	cm^2

【問13】

図のように，線分AB上にAC＝2 cm，CB＝4 cmとなる点Cをとり，線分AC，CBをそれぞれ1辺とする正三角形DAC，ECBを，線分ABについて同じ側につくる。また，線分AEとDBの交点をFとする。次の問1～問3に答えなさい。

（大分県 2011年度）

問1 ∠BFC＝60° となることを次のように証明した。ア には，適する式を，イ，ウ には適する記号を書いて，証明を完成させなさい。



〔証明〕

△ACEと△DCBにおいて，

△DACと△ECBは正三角形だから，

AC＝DC …①

| ア | | …②

また，∠ACE＝∠ACD ＋ | イ | ∠ |

∠DCB＝∠ECB ＋ | イ | ∠ |

∠ACD＝∠ECB＝60° だから，

∠ACE＝∠DCB …③

①，②，③より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ACE≡△DCB

対応する角がそれぞれ等しいので，∠CEA＝∠CBD

ここで，2点E，Bが直線FCについて同じ側にあることから，円周角の定理の逆より，

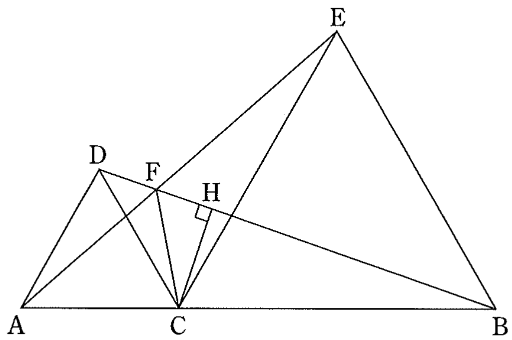
4点 | ウ | □，□，□，□ |

は同一円周上にある。

したがって，円周角の定理より，∠BFC＝∠BEC＝60°

問2 △DCBの面積を求めなさい。

問3 点Cから線分DBに垂線を引きその交点をHとする。このとき，線分FHの長さを求めなさい。



解答欄

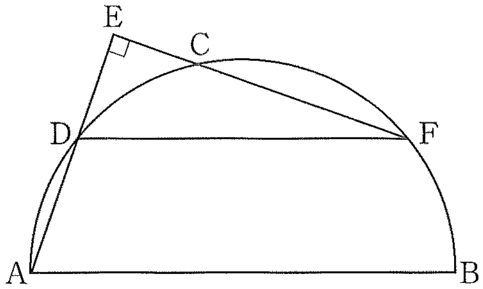
<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td>∠</td></tr>
<tr><td>ウ</td><td>$\boxed{\qquad}$, $\boxed{\qquad}$, $\boxed{\qquad}$, $\boxed{\qquad}$</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

【問14】

　図のように，線分ABを直径とする半円があり，$\overset{\frown}{AB}$上に点Cを，$\overset{\frown}{AC}$の長さが$\overset{\frown}{CB}$の長さより短くなるようにとる。また，$\overset{\frown}{AC}$上に点Dを，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$となるようにとり，Cから直線ADにひいた垂線と直線ADとの交点をE，ECの延長と$\overset{\frown}{AB}$との交点をFとする。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2011年度）

問1　DF // ABであることを証明しなさい。



問2　AB＝6 cm，AD＝2 cmのとき，線分EFの長さを求めなさい。

　　ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm