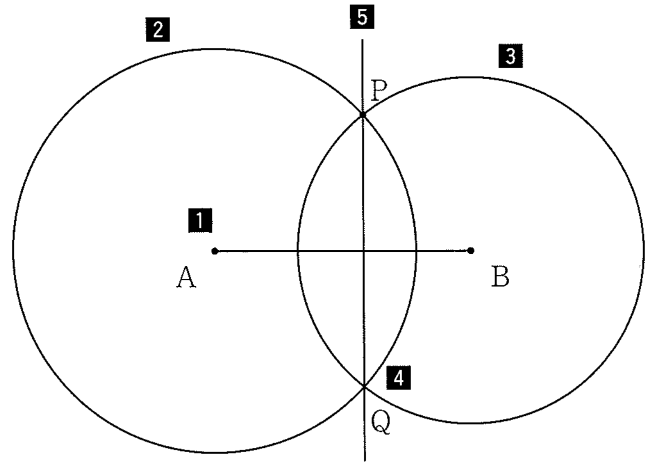
5－7. 平面図形　その他の証明　複合問題ほか　2010年度出題

【問1】

図のように，3点A，B，Pがあり，次の ❶ ～ ❺ の操作を順に行います。

❶	線分ABをひく。
❷	点Aを中心とし，線分APを半径とする円をかく。
❸	点Bを中心とし，線分BPを半径とする円をかく。
❹	❷，❸ でかいた2つの円の交点のうち，点Pと異なる点をQとする。
❺	2点P，Qを通る直線をひく。



このとき，直線PQが，線分ABの垂線であることを証明しなさい。

（北海道　2010年度）

解答欄

問2	〔証明〕

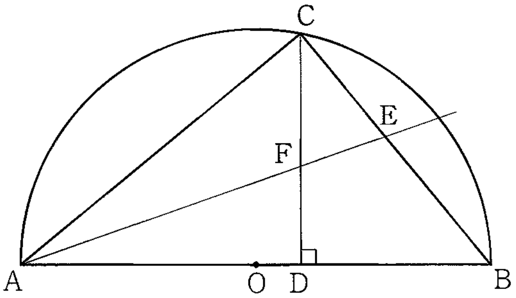
【問2】

図1のように，線分ABを直径とする半円があり，ABの中点をOとする。まず，弧AB上に点Cをとり，CとA，CとBを線分で結ぶ。次に，下の条件を満たす3点D，E，Fをとる。

条件

Dは直径AB上の点で，AB⊥CDである。 E，Fは，それぞれ∠BACの二等分線と線分CB，線分CDとの交点である。

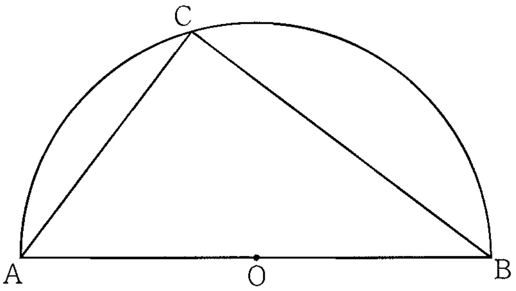
図1



条件にしたがって3点D，E，Fをとると，三角形CEFは，弧AB上の点Cの位置にかかわらず，つねに二等辺三角形になる。次の問1～問3に答えなさい。

（群馬県　2010年度）

図2

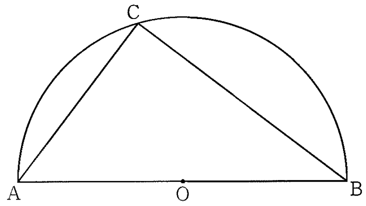


問1　図2は，弧AB上の点Cの位置を変え，CとA，CとBを線分で結んだものである。条件にしたがって3点D，E，Fを，コンパスと定規を用いて作図によりそれぞれ求めなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。

問2　三角形CEFが二等辺三角形であることを証明しなさい。

問3　三角形CEFは正三角形となるときがある。このときのAD：DBを，最も簡単な整数比で表しなさい。

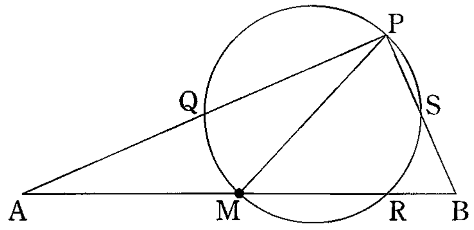
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>AD:DB＝　　　:</td></tr>
</table>

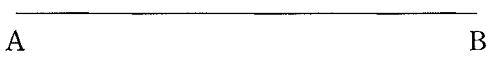
【問3】

図のように，線分ABがあり，その中点をMとします。AM＝PMとなる点Pを，∠PMBが鋭角となるようにとります。線分PMを直径とする円をかき，この円と線分AP，MB，PBとの交点をそれぞれQ，R，Sとします。このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県 後期 2010年度）



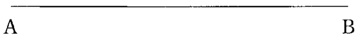
問1 この点Pを1点とり，線分PMを直径とする円をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は，消さないでおきなさい。



問2 線分QSと線分ABが平行であることを証明しなさい。

問3 AB＝10 cm，MR＝4 cmのとき，線分PSの長さを求めなさい。ただし，根号はつけたままで答えなさい。

解答欄

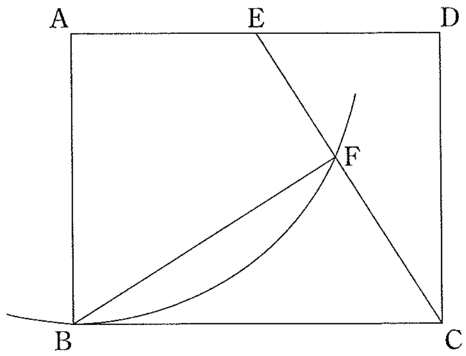
<table>
<tr><td>問1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>cm</td></tr>
</table>

【問4】

図のように，長方形ABCDの辺ADの中点をEとする。頂点Aを中心とする半径ABの円Aの一部をかき，線分CEとの交点をFとすると，BF⊥CEとなる。ただし，AB＞AEとする。このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県　2010年度）

問1　次ページの ┆　┆ の中は，BF⊥CEの証明を途中まで示してある。$\boxed{\text{(a)}}$ に入る最も適当なものを，次ページの語群のア～エのうちから一つ選び，符号で答えなさい。また，$\boxed{\text{(b)}}$ には適当なことばを，$\boxed{\text{(c)}}$ には証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし，┆　┆ の中の①～⑤に示されている関係を使う場合，番号の①～⑤を用いてもかまわないものとする。



証明

辺BAの延長と，線分CEの延長との交点をGとする。

△GAEと△CDEにおいて，

仮定から，

$\boxed{\quad\text{(a)}\quad}$ …①

長方形の向かい合う辺は平行なので，

GB // DC …②

②より，平行線の錯角は等しいから，

∠GAE＝∠CDE …③

$\boxed{\text{(b)}}$ は等しいから，

∠GEA＝∠CED …④

①，③，④より，一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△GAE≡△CDE …⑤

$\boxed{\qquad\qquad\text{(c)}\qquad\qquad}$

したがって，BF⊥CEとなる。

語群

ア　AG＝DC
イ　GE＝CE
ウ　AE＝DE
エ　∠AGE＝∠DCE

問2　BF＝4 cm，CF＝EFのとき，長方形ABCDの面積を求めなさい。

解答欄

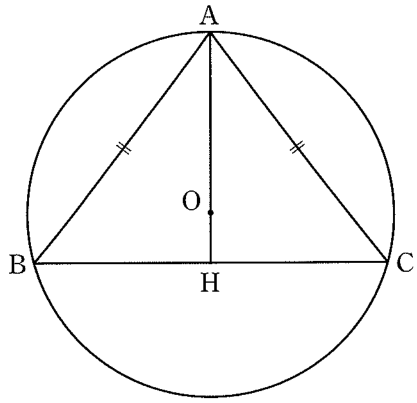
問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm^2	

【問5】

図のように，円Oの周上の3点A，B，Cを頂点とするAB＝ACの二等辺三角形ABCをつくり，点Aと中心Oを結ぶ直線が辺BCと交わる点をHとする。このとき，次の問いに答えよ。

（福井県　2010年度）

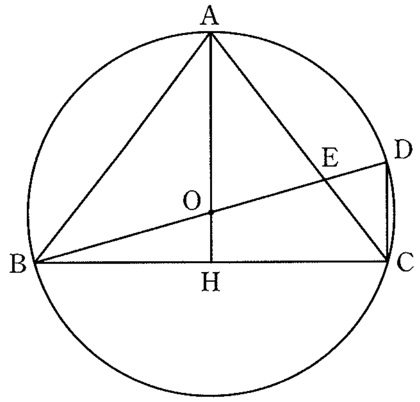
問1　点Oと点B，点Cをそれぞれ結び，線分AHと辺BCが垂直であることを証明せよ。



問2　円Oの直径BDと辺ACとの交点をEとする。AB＝AC＝5 cm，BC＝6 cmのとき，

(1)　円Oの半径を求めよ。

(2)　△BCEの面積を求めよ。



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

【問6】

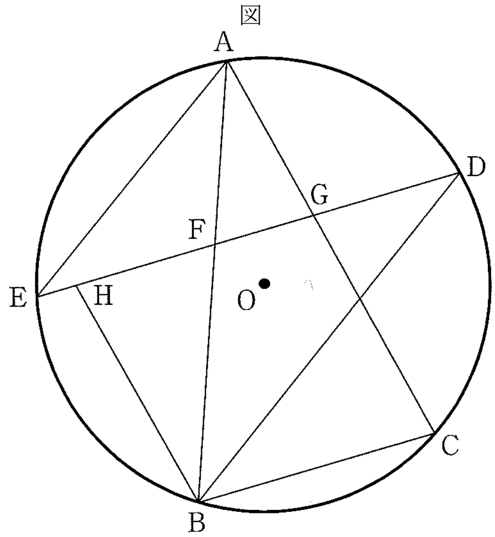
図において，3点A，B，Cは円Oの円周上の点である。∠ABCの二等分線と円Oとの交点をDとし，点Aを通りDBに平行な直線と円Oとの交点をEとする。EDとAB，ACとの交点をそれぞれF，Gとし，ED上に∠DGC＝∠DHBとなる点Hをとる。このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（静岡県　2010年度）

問1　四角形HBCGは平行四辺形であることを証明しなさい。

問2　HF＝4 cm，FG＝3 cm，GD＝4 cmのとき，EFの長さを求めなさい。

図



解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

【問7】

平行四辺形ABCDの辺AB，CD上にそれぞれ点E，FをAE＝CFとなるようにとり，対角線ACと線分EFとの交点をOとする。このとき，OE＝OFであることを証明したい。(Ⅰ)，(Ⅱ) にあてはまる最も適当なものを，下のアからカまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書きなさい。ただしE，Fは平行四辺形の頂点上にはないものとする。

（愛知県A 2010年度）

〔証明〕

△OAEと△OCFで，

AB // DCで，錯角は等しいから，

(Ⅰ) …①

∠OEA＝∠OFC …②

また，AE＝CF …③

①，②，③から，(Ⅱ) ので，

△OAE≡△OCF

よって，OE＝OF

ア ∠DAO＝∠BCO

イ ∠OAE＝∠OCF

ウ ∠AOE＝∠COF

エ 2組の角が，それぞれ等しい

オ 2辺とその間の角が，それぞれ等しい

カ 1辺とその両端の角が，それぞれ等しい

解答欄

Ⅰ (　　　)，Ⅱ (　　　)

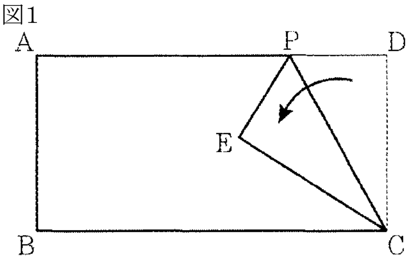
【問8】

アケミさんとヒロトさんは，長方形の紙を折ってできる図形に興味をもち，図1，図2のような模式図をかいて考えてみた。図1，図2において，四角形ABCDはAB＝10 cm，AD＝20 cmの長方形である。Pは，辺AD上にあってA，Dと異なる点である。△PEC≡△PDCであり，Eは直線PCについてDと反対側にある。DP＝x cmとし，$0<x<20$とする。次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 後期 2010年度）

問1 図1は，$0<x<10$のときの状態を示している。図1において，

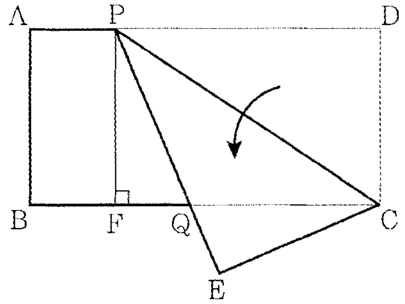
図1



(1) 四角形ABCPの面積をxを用いて表しなさい。

(2) PC＝11 cmであるときのxの値を求めなさい。

図2



問2 図2は，$10<x<20$のときの状態を示している。図2において，Qは線分PEと辺BCとの交点であり，FはPから辺BCにひいた垂線と辺BCとの交点である。

(1) アケミさんとヒロトさんは，△QCPが二等辺三角形であると予想し，そのことを証明しようと考えた。アケミさんは，△QCPの二つの内角の大きさが等しいことを示そうと考えた。ヒロトさんは，△PFQ≡△CEQであることを証明してから，△QCPのこつの辺の長さが等しいことを示そうと考えた。次の【アケミさんの証明】における $\boxed{ⓐ}$，$\boxed{ⓑ}$，$\boxed{ⓒ}$ に入れるのに適している角を表す文字をそれぞれ書き入れて証明を完成させなさい。また，次の【ヒロトさんの証明】における $\boxed{ⓓ}$ の部分を書き加え，証明を完成させなさい。

【アケミさんの証明】

△ PEC≡△PDCだから

∠ $\boxed{ⓐ}$ ＝∠ $\boxed{ⓑ}$ …㋐

AD // BCだから

∠ $\boxed{ⓑ}$ ＝∠ $\boxed{ⓒ}$ (錯角) …㋑

㋐，㋑より ∠ $\boxed{ⓐ}$ ＝∠ $\boxed{ⓒ}$

よって，△QCPは二つの内角が等しいから二等辺三角形である。

【ヒロトさんの証明】

△ PFQと△CEQにおいて

$\boxed{ⓓ}$

よって，△QCPは二つの辺が等しいから二等辺三角形である。

(2) x＝15のときの線分BQの長さを求めなさい。

解答欄

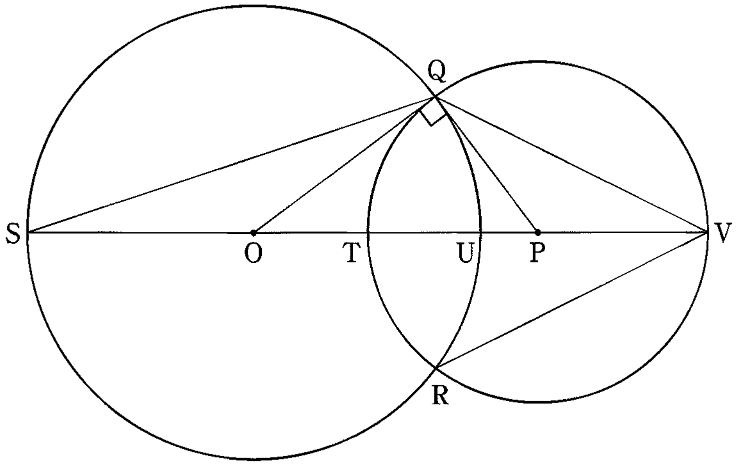
<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(1)</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">問2</td><td rowspan="4">(1)</td><td>ⓐ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓑ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓒ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓓ</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

【問9】

図で，2点Q，Rは，半径4 cmの円Oと半径3 cmの円Pの交点である。4点S，T，U，Vは，2つの円の中心O，Pを通る直線と円との交点である。また，OP＝5 cm，∠OQP＝90°である。次の問1～問4に答えなさい。

（和歌山県　2010年度）

問1　TUの長さを求めなさい。



問2　∠OPQ＝a° のとき，∠OSQの大きさをaの式で表しなさい。

問3　∠OPQ＝∠QVRであることを証明しなさい。

問4　△OQSの面積を求めなさい。

解答欄

問1	TU＝　　　　cm
問2	∠OSQ＝　　　　度
問3	〔証明〕
問4	△OQS＝　　　　cm^2

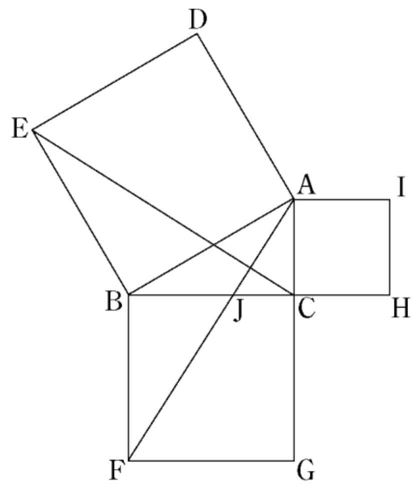
【問10】

図のように，∠C＝90° の直角三角形ABCの外側に，各辺を1辺とする正方形ADEB，BFGC，CHIAをつくる。また，点Cと点E，点Aと点Fを結び，辺BCと線分AFとの交点をJとする。このとき，次の問1・問2に答えなさい。

（高知県 前期 2010年度）

問1 AF＝ECを証明せよ。

問2 AC＝3 cm，BC＝6 cmのとき，線分JFの長さを求めよ。



解答欄

問1	〔証明〕 したがって AF＝EC
問2	cm

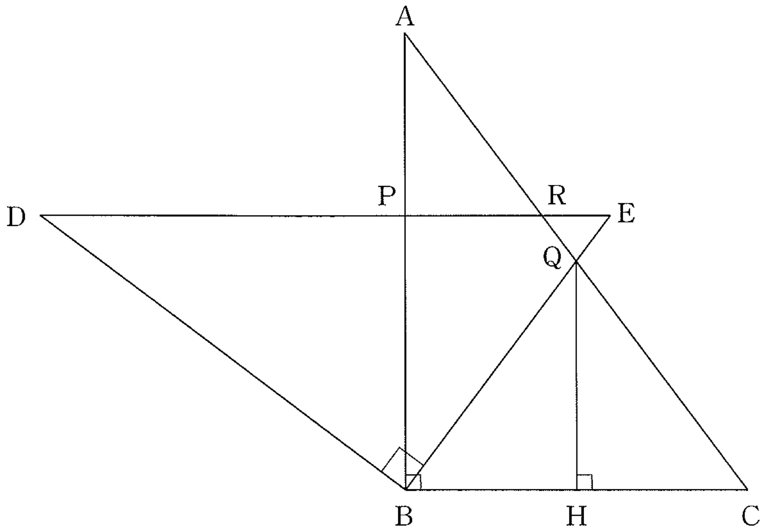
【問11】

図で，△ABCと△DBEは，∠ABC＝∠DBE＝90°の合同な直角三角形である。ABとDEの交点をP，ACとBEの交点をQ，ACとDEの交点をRとし，点QからBCに垂線をひき，その交点をHとする。DE // BC，BC＝3 cm，CA＝5 cmとするとき，次の問1～問5に答えなさい。

（佐賀県 後期 2010年度）

問1 DBの長さを求めなさい。

問2 △QBCが二等辺三角形であることを証明しなさい。



問3 QHの長さを求めなさい。

問4 PBの長さを求めなさい。

問5 四角形PBQRの面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	
問3	cm
問4	cm
問5	cm^2