5－3. 平面図形 その他の証明 複合問題ほか 2005年度出題

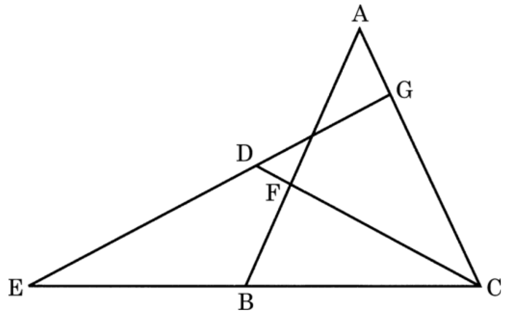
【問1】

図のように，頂点Cが共通な△ABCと△DECがあります。点E，B，Cは一直線上にあり，AB＝AC，DE＝DCです。辺ABと辺DCの交わる点をFとし，辺EDの延長と辺ACの交点をGとします。次の問いに答えなさい。

（北海道 2005年度）

問1．AB⊥CFのとき，∠EGC＝90° を証明しなさい。

問2．∠ABE＝112° のとき，∠BACの大きさを求めなさい。



問3．DE＝2 cm，∠DEC＝30° とします。このとき，辺ECの長さを求めなさい。

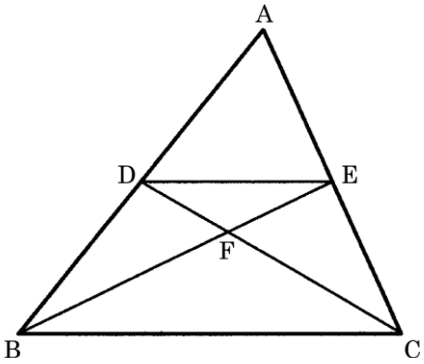
解答欄

問1	証明
問2	度
問3	cm

【問2】

△ABCの2辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとする。BEとCDの交点をFとするとき，BF:FE＝2：1になることを証明しなさい。

（青森県　2005年度）



解答欄

証明

【問3】

∠XOYがあり，次の［手順］で半直線OCを作図した。このとき，半直線OCが∠XOYの二等分線になることを証明したい。$\boxed{}$ の［証明］を完成させなさい。

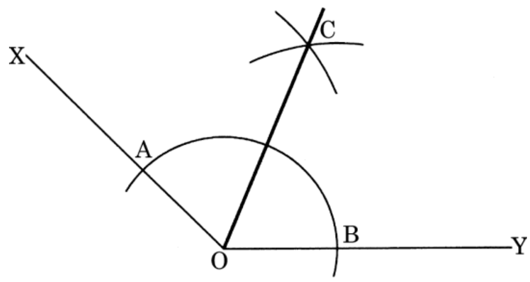
（秋田県 2005年度）

[手順]

$\boxed{\text{I}}$ 頂点 O を中心とする円をかき，半直線 OX，OY との交点をそれぞれ A，B とする。

$\boxed{\text{II}}$ 点 A，B を中心として等しい半径の円をそれぞれかき，その交点を C とする。

$\boxed{\text{III}}$ 半直線 OC をひく。



[証明]

したがって，半直線OCは∠XOYの二等分線である。

解答欄

証明

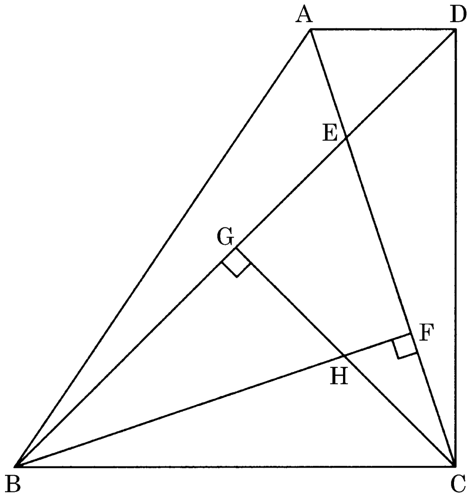
したがって，半直線OC は∠XOY の二等分線である。

【問4】

図において，四角形ABCDは，AD∥BCであり，△BCDは∠BCD＝90°の直角二等辺三角形である。四角形ABCDの対角線の交点をE，点BからACにひいた垂線とACとの交点をF，点CからBDにひいた垂線とBDとの交点をG，BFとCGとの交点をHとする。BC＝6 cm，BE:ED＝3:1であるとき，あとの問いに答えなさい。

（山形県 2005年度）

1．ADの長さを求めなさい。



2．DEの長さを求めなさい。

3．△ABEの面積を求めなさい。

4．△BHGと△CHFは相似である。このことを利用して，△BCHと△CDEが合同であることを証明したい。次の証明を完成させなさい。ただし，△BHGと△CHFが相似であることは証明しなくてよい。

＜証明＞

△BCHと△CDEにおいて

仮定より

∠CBG＝∠CDG＝45°

∠BGC＝90° だから

△GBCと△GCDは直角二等辺三角形となり

∠GCB＝∠GCD＝45°

したがって，∠BCH＝∠CDE …①

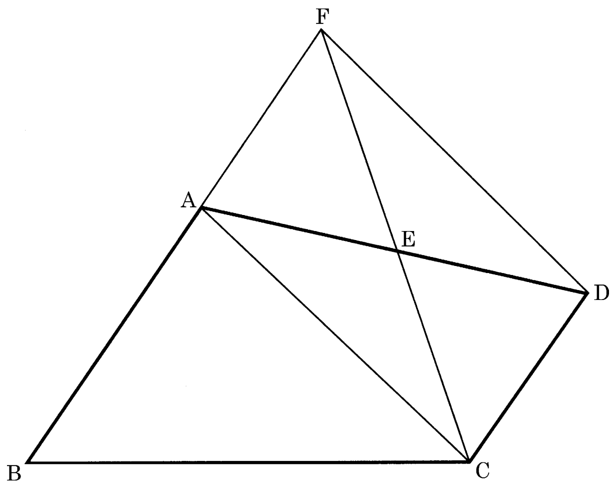
解答欄

1	cm
2	cm
3	cm²
4	〔証明〕 △BCH と△CDE において 仮定より ∠CBG＝∠CDG＝45° ∠BGC＝90°　だから △GBC と△GCD は直角二等辺三角形となり ∠GCB＝∠GCD＝45° したがって，∠BCH＝∠CDE　…①

【問5】

図のように，AB // DCである四角形ABCDがあり，辺ADの中点をE，CEの延長とBAの延長との交点をFとする。このとき，四角形ACDFは平行四辺形になることを証明しなさい。

（福島県 2005年度）



解答欄

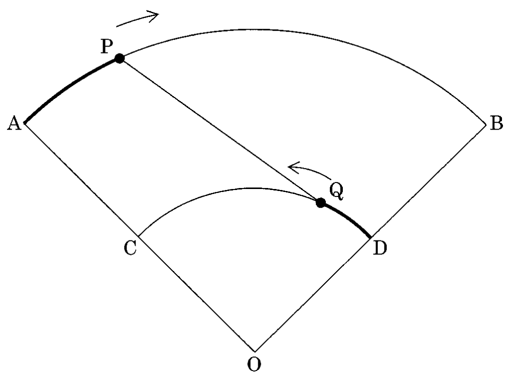
証明

【問6】

図のように，半径が4 cm，中心角が$\angle AOB=90°$のおうぎ形OABがある。線分OA，OBの中点をそれぞれC，Dとするとき，中心角が$\angle COD=90°$のおうぎ形OCDをつくる。点Pは点Aを出発し，$\overset{\frown}{AB}$上を一定の速さで動き，4秒で点Bに到着する。点Qは点Dを出発し，$\overset{\frown}{DC}$上を一定の速さで動き，4秒で点Cに到着する。2点P，Qは，それぞれ2点A，Dを同時に出発する。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（茨城県 2005年度）

(1) 線分PQの長さが最小となるのは，出発してから何秒後か求めなさい。



(2) 初めて$\angle PQO=90°$になるのは，出発してから何秒後か求めなさい。

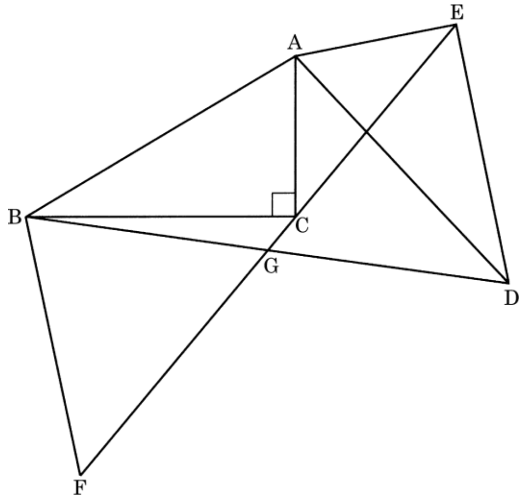
解答欄

(1)	秒後
(2)	秒後

【問7】

図で三角形ABCは∠ACB＝90° の直角三角形である。三角形ADEは，三角形ABCを，頂点Aを中心に回転させたものである。直線CE上に，点FをBC＝BFとなるようにとる。直線BDと直線EFとの交点をGとするとき，EG＝FGとなることを証明しなさい。

（群馬県 2005年度）



解答欄

証明

【問8】

図1のように，∠A＝90°，AB＝ACの直角二等辺三角形があります。この△ABCの頂点Cを辺AB側に1回折り返します。このときの折り目の線を，辺BC，CA上の点をそれぞれ，P，Qとして，線分PQとします。このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県 2005年度）

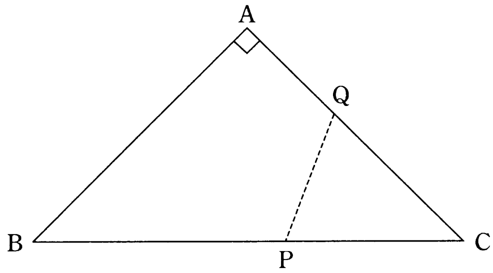


図1

(1) 図2のように，△ABCの頂点Cが頂点A，Bを除いた辺AB上に重なるように折ります。ここで，△CPQと△BPCが相似になるとき，∠CQAの大きさxを求めなさい。

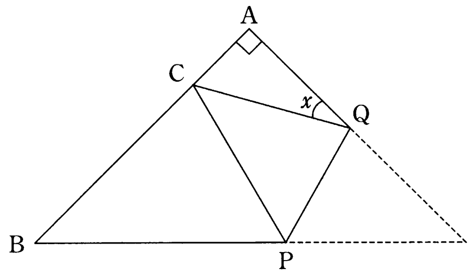


図2

(2) 図3のように，△CPQの辺CP，CQが，頂点A，Bを除いた辺ABと交わるように折ったときの交点を，頂点Aに近い方からS，Rとします。ここで，△CPQと△BPRが相似の関係を保ちながら折っていくと，△CPQと△BPRが合同となるときがあります。合同になるためには，点Pの位置を図1の辺BCのどこにして折ればよいかを答え，このとき，△CPQと△BPRが合同になることを証明しなさい。また，△CPQと△BPRが合同で，線分ASの長さがちょうど2cmのとき，線分PQの長さを求めなさい。ただし，根号はつけたままで答えなさい。

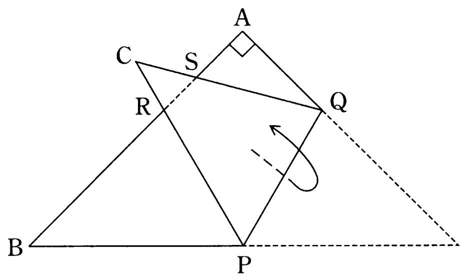


図3

解答欄

(1)	度	
(2)	点Pの位置	
	証明	
	cm	

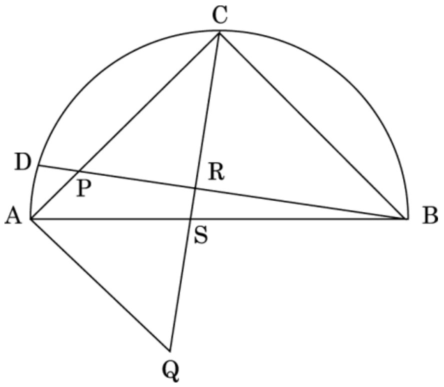
【問9】

図のように，線分ABを直径とする半円の周上にAC＝BCとなる点Cをとる。また，$\overset{\frown}{AC}$上の点をDとし，線分BDとACの交点をPとする。点Aを通り，線分ACに垂直な直線を引き，その直線上にCP＝AQとなる点Qを，線分CQとABが交わるようにとる。さらに，線分CQとBDの交点をR，線分CQとABの交点をSとする。このとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（千葉県 2005年度）

⑴ CR⊥BPであることを証明しなさい。

⑵ PR：AQ＝3：5，CD＝3 cmのとき，BSの長さを求めなさい。



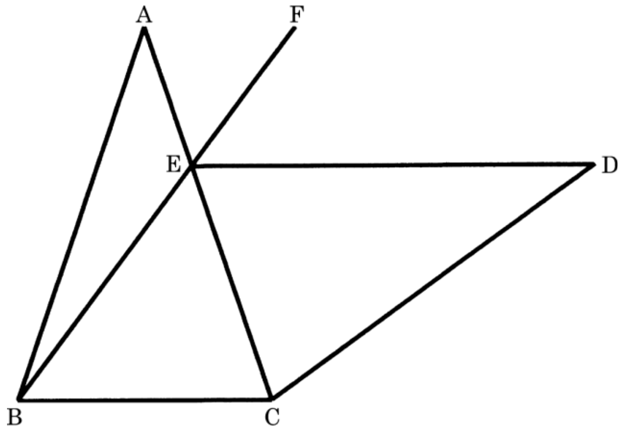
解答欄

(1)	証明
(2)	cm

【問10】

図のように，AB＝AC，AB＞BCである二等辺三角形ABCがある。頂点Cを中心として，辺BCが辺ACと重なるまで△ABCを回転させてつくった三角形を△DECとする。また，頂点Bと点Eを結んだ線分BEの延長上に点Fをとる。このとき，∠AEF＝∠DEFであることを証明しなさい。

（新潟県　2005年度）



解答欄

証明

【問11】

図1は，2つの長方形を重ねたものであり，長方形ABCD，EFGCは合同である。図2，図3は，点Cを中心として図1の長方形EFGCを時計まわりに回転させたものである。このとき，次の⑴，⑵に答えなさい。ただし，AB＝3 cm，BC＝4 cmとする。

（石川県 2005年度）

図 1

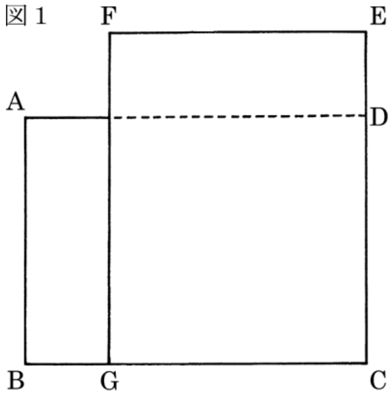
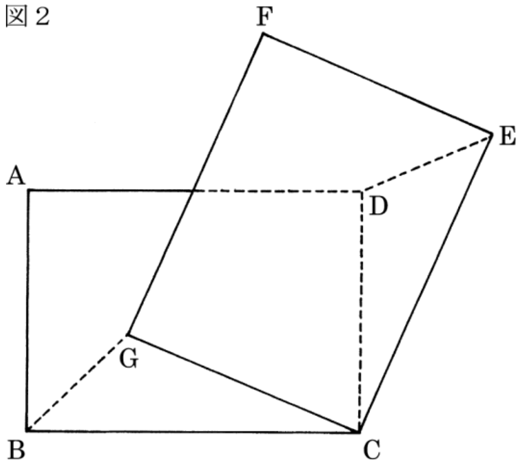


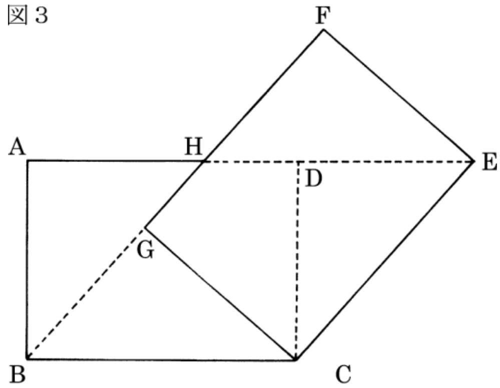
図 2



⑴ 図2において，∠BGC＝∠EDCであることを証明しなさい。

⑵ 図3のように，3点A，D，Eが1つの直線上にあるときは，3点F，G，Bも1つの直線上にある。点Hは辺ADとFGの交点である。このとき，FHの長さを求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

図 3



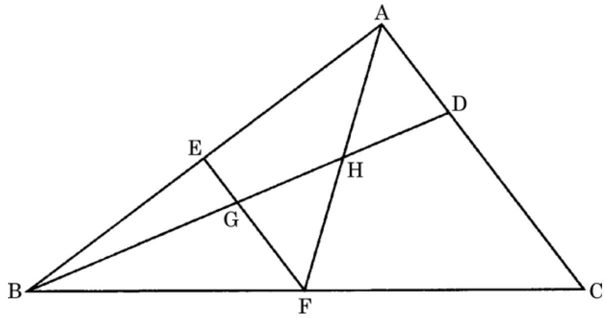
解答欄

(1)	証明
(2)	計算 答

【問12】

図のように，AB＝8 cm，BC＝10 cm，CA＝6 cmの△ABCがあり，CD＝4 cm，点E，Fはそれぞれ辺AB，BCの中点である。また，BDとEF，AFとの交点をそれぞれG，Hとする。このとき，下の各問いに答えなさい。

（長野県 2005年度）



(1) FGの長さを求めなさい。

(2) 四角形AGFDは平行四辺形であることを証明しなさい。

(3) △BFHの面積を求めなさい。

(4) 四角形CDHFの周の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	証明
(3)	cm^2
(4)	cm

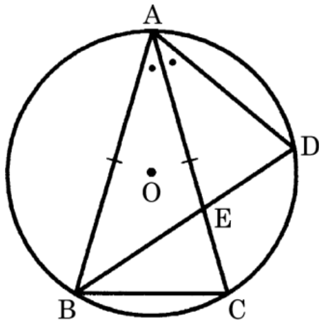
【問13】

数学の授業で，先生から次の問題が出された。

問題　右の図で，4点A，B，C，Dは円Oの円周上の点であり，AB＝AC，

∠BAC＝∠CADである。線分ACとBDとの交点をEとするとき，

AE＝ADであることを証明しなさい。



この問題を，ゆき子さんは三角形の相似条件を使って，よしおさんは三角形の合同条件を使って，それぞれ解こうとした。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（岐阜県　2005年度）

(1)　ゆき子さんは，次のように証明した。アには角を，イには三角形の相似条件を，ウには辺を，それぞれあてはまるように書きなさい。

証明　△ABCと△AEDで，

仮定から，∠BAC＝∠EAD…①

1つの弧に対する円周角の大きさは一定だから，

∠C＝$\boxed{ア}$…②

①，②から，$\boxed{\quad イ \quad}$ので，△ABC∽△AED

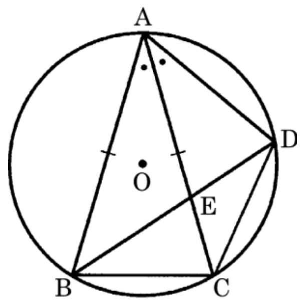
対応する線分の比は等しいから，AB：AE＝$\boxed{ウ}$：AD

仮定から，AB＝AC

だから，AC：AE＝$\boxed{ウ}$：AD

よって，AE＝AD

(2)　よしおさんは，右の図のように点CとDを結び，弧ADに対する円周角の大きさが一定であることを使って，ある2つの三角形が合同であることを示し，AE＝ADであることを証明しようとした。図で，AE＝ADであることを，よしおさんの考えで証明しなさい。



解答欄

	ア	イ	ウ
(1)			
(2)	証明		

【問14】

2つの四角形ABCD，BEFCが，ともに平行四辺形のとき，四角形AEFDも平行四辺形であることを証明したい。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ をうめて証明を完成せよ。ただし，点Eは直線AD上にはないとする。

（愛知県A 2005年度）

(証明)

四角形ABCDは平行四辺形だから，

$\boxed{ア}$ ∥ BC，$\boxed{ア}$ ＝BC …①

四角形BEFCは平行四辺形だから，

BC ∥ $\boxed{イ}$，BC＝$\boxed{イ}$ …②

①，②から，

$\boxed{ア}$ ∥ $\boxed{イ}$，$\boxed{ア}$ ＝ $\boxed{イ}$

したがって，1組の向かいあう辺が平行で長さが等しいので，四角形AEFDは平行四辺形である。

解答欄

ア（　　　　　　），イ（　　　　　　）

【問15】

△ABCで，辺AB，AC上に，それぞれ点D，Eがあるとき，AD：DB＝AE：ECならば，DE∥BCであることを証明したい。$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ をうめて証明を完成せよ。

（愛知県B 2005年度）

(証明)	CからBAに平行な直線をひき，直線DEとの交点をFとすると， △ADE∽△ $\boxed{ア}$ がいえる。 だから，AD：$\boxed{イ}$＝AE：CE また，仮定から，AD：DB＝AE：EC だから，AD：DB＝AD：$\boxed{イ}$ よって，DB＝$\boxed{イ}$ 四角形DBCFで，DB＝$\boxed{イ}$，DB∥ $\boxed{イ}$ だから，この四角形は平行四辺形である。 したがって，DE∥BCである。

解答欄

ア(　　　　　　　　)，イ(　　　　　　　　)

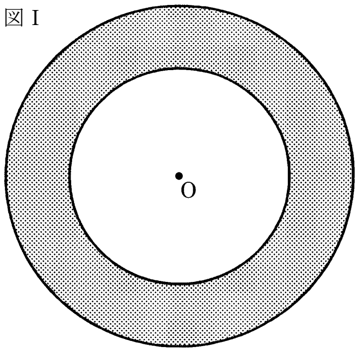
【問16】

図Ｉにおいて，大小二つの円はともに点Oを中心とする円である。図Ｉ中の で示した部分は，大きい方の円から小さい方の円を除いてできる図形である。円周率をπとして，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 前期 2005年度）

(1) 図Ｉの大きい方の円の半径が6 cmの場合，

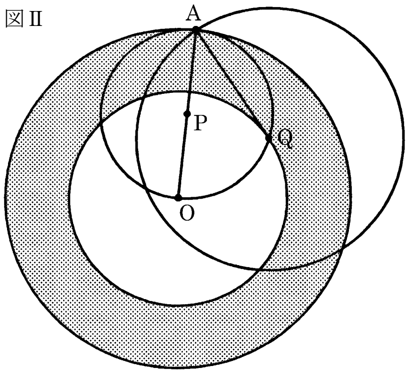
図Ｉ



① 大きい方の円の面積を求めなさい。

② で示した部分の面積と小さい方の円の面積とが等しくなるとき，小さい方の円の半径は何cmですか。

図Ⅱ

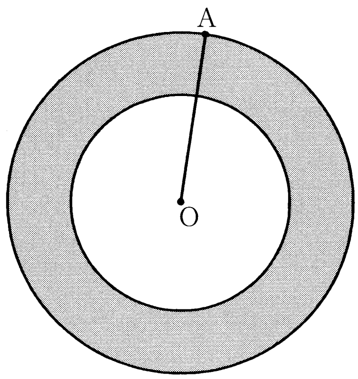


(2) 図Ｉ中の大きい方の円の周上に点Aをとる。OとAとを結ぶ。線分OAの中点をPとする。

① 解答欄の図は，図Ｉに点Aと線分OAをかき加えたものである。点Pを定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように，作図に用いた線は残しておくこと。

② 線分OAを直径とする円Pをかき，円Pと図Ｉ中の小さい方の円との交点のうちの一つをQとする。AとQとを結ぶ。Qを中心とし線分AQを半径とする円Qをかく。図Ⅱは，図Ｉに点A，線分OA，点P，円P，点Q，線分AQ，円Qをかき加えたものである。図Ⅱ中のOを中心とする二つの円のうちの大きい方の円の半径をa cmとし，小さい方の円の半径をb cmとする。 で示した部分の面積をS cm^{2}とし，円Qの面積をT cm^{2}とするとき$T=S$ であることを証明しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>①</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td>
</td></tr>
<tr><td>②</td><td>証明</td></tr>
</table>

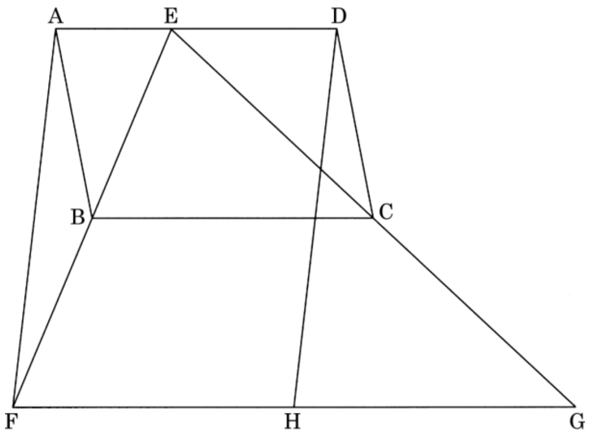
【問17】

図のように，平行四辺形ABCDの辺AD上に点Eがあります。線分EB，ECの延長上にそれぞれBF＝BE，CG＝CEとなるように点F，Gをとります。線分FGの中点をHとします。これについて，次の(1)･(2)に答えなさい。

（広島県 2005年度）

(1) 四角形AFHDが平行四辺形であることを証明しなさい。

(2) BC＝CE，∠BAE＝81°，∠DCE＝33°のとき，∠CBEの大きさは何度ですか。



解答欄

(1)	〔仮定〕図において，四角形ABCD は平行四辺形，BF＝BE，CG＝CE，点H は線分FG の中点 〔結論〕四角形AFHD は平行四辺形 〔証明〕
(2)	度

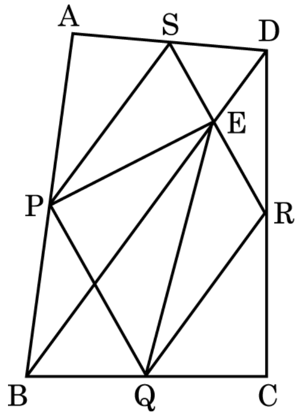
【問18】

図のように，∠C＝90° の四角形ABCDがある。この四角形の辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれP，Q，R，Sとし，四角形PQRSをつくる。また，線分RSと線分BDとの交点をEとし，点Eと点P，Qをそれぞれ結ぶ。このとき，次の⑴・⑵の問いに答えなさい。

（高知県 2005年度）

⑴ 四角形PQRSが平行四辺形であることを証明したい。解答欄に証明の続きを書いて証明を完成させよ。

⑵ AD＝4 cm，BC＝5 cm，CD＝7 cmで点Pと点Rを結ぶ線分PRが線分BCに平行となるとき三角形EPQの面積を求めよ。



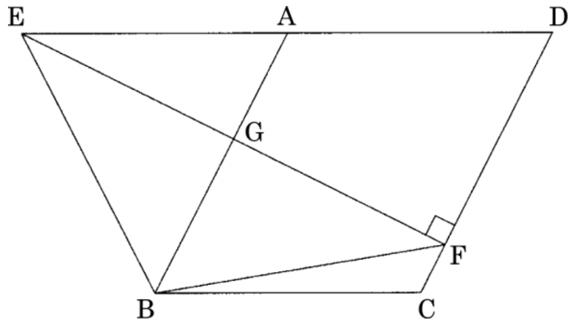
解答欄

⑴	証明 △ABDにおいて 点P，Sはそれぞれ AB，ADの中点なので， 中点連結定理から PS ∥BD，PS＝$\frac{1}{2}$BD △CBDにおいても同様にして ゆえに，四角形PQRSは平行四辺形である。
⑵	cm²

【問19】

図で四角形ABCDは平行四辺形である。辺DAを延長した直線上にDA＝AEとなる点Eをとり，点Eから直線CDに垂線をひき，直線CDとの交点をFとする。さらに，ABとEFの交点をGとする。このとき，BE＝BFであることを証明しなさい。

（佐賀県 2005年度）



解答欄

証明

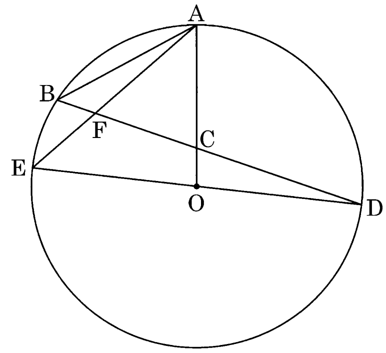
【問20】

図は，点Oを中心とする円で，2点A，Bは円の周上にある。点Cは線分OA上にあり，点DはBCの延長と円Oとの交点である。また，点EはDOの延長と円Oとの交点であり，点Fは2つの線分BD，AEの交点である。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2005年度）

(1) ∠ABC＝∠FACであることを証明しなさい。

(2) OA＝AB＝4 cm，OC＝1 cmであるときの線分FAの長さを求めたい。
線分FAの長さの求め方について，次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ に当てはまる数を入れて，文章を完成しなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。



△ABCと△FACにおいて，∠ABC＝∠FACであることと，
∠BCAと∠ACFとが共通であることから，△ABC∽△FACであることがわかる。
OとBを結ぶと，OB＝OA＝AB＝4 cmだから，△OABは正三角形である。
したがって，BからOAにひいた垂線とOAとの交点をGとすると，
AG＝$\boxed{ア}$ cmとなる。
次に，△BCGで三平方の定理を利用すると，
BC＝$\boxed{イ}$ cmとなる。
さらに，△ABC∽△FACであることを利用すると，
FA＝$\boxed{ウ}$ cmとなる。

解答欄

(1)	証明					
(2)	ア		イ		ウ	