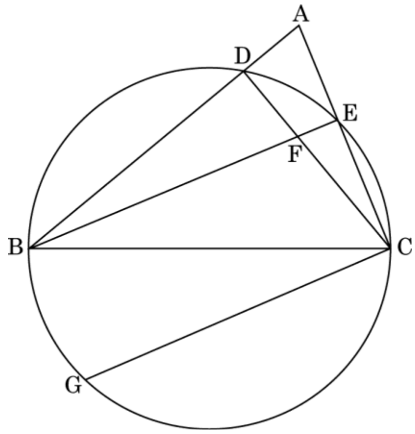
5－2. 平面図形　その他の証明　複合問題ほか　2003年度出題

【問1】

　図のように，3つの内角がすべて鋭角である△ABCがあります。辺BCを直径とする円と辺AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとし，線分CDとBEとの交点をFとします。点Cを通り，線分BEに平行な直線と円との交点をGとします。次の問いに答えなさい。

（北海道　2003年度）

問1．∠EGC＝25°のとき∠CEGの大きさを求めなさい。



問2．DB＝DCのとき，BF＝CAを証明しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>度</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>証明</td></tr>
</table>

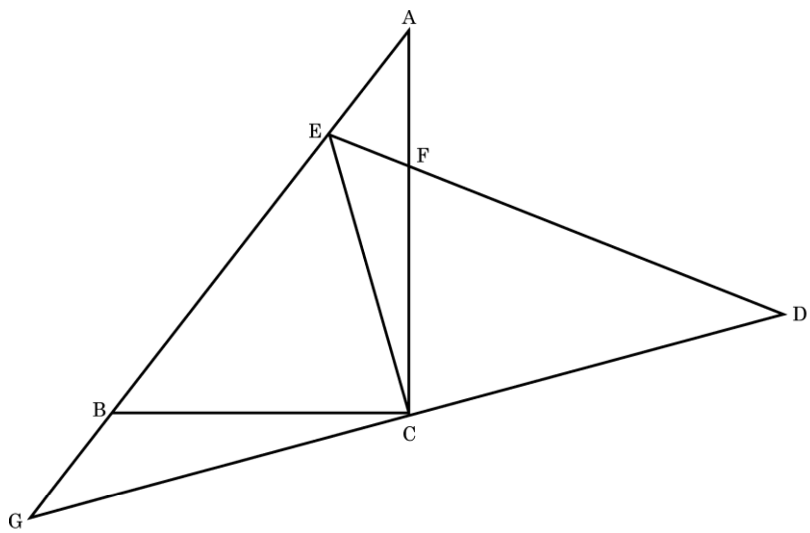
【問2】

　図で，△ABCは∠ACB＝90° の直角三角形である。点Dは線分ACの右側に，点Eは線分AB上にあり，△ABC≡△DECである。線分ACとDEの交点をF，線分ABとDCを延長した直線の交点をGとする。次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

（秋田県　2003年度）

⑴　EG＝EDとなることを証明しなさい。

⑵　AB : BC＝5 : 3のとき，AF : FDを求めなさい。



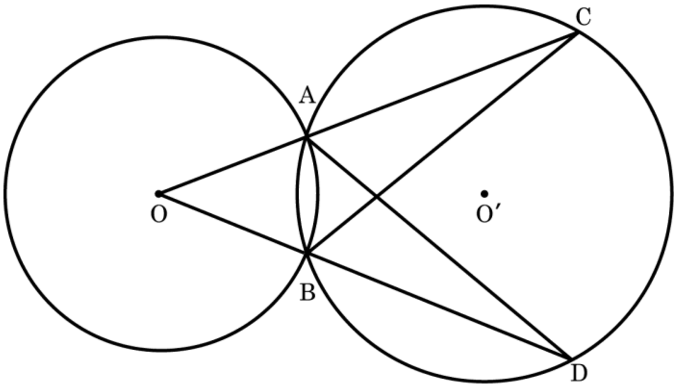
解答欄

(1)	証明
(2)	:

【問3】

図のように，2つの円O，O′ が2点A，Bで交わっている。OA，OBの延長と円O′ との交点をそれぞれC，Dとする。このとき，AD＝BCであることを証明しなさい。

（栃木県　2003年度）



解答欄

証明

【問4】

ある中学校の数学の授業で，生徒がつくった問題を皆で考えた。次の各問に答えよ。

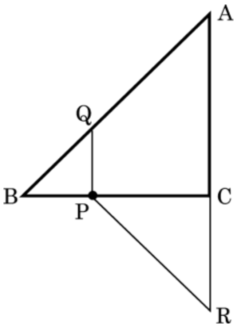
（東京都　2003年度）

Sさんは，次の問題をつくった。

［Sさんの問題］

右の**図１**で，△ABCは，AC＝BC＝10 cm，∠ACB＝90° の直角二等辺三角形です。
点Pは，△ABCの辺BC上にある点で，点B，Cのいずれにも一致しません。
△QBPは，QP＝BP，∠QPB＝90° の直角二等辺三角形です。
△PRCは，PC＝RC，∠PCR＝90° の直角二等辺三角形です。
BA＋AC＝ℓ cm，BQ＋QP＋PR＋RC＝m cmとするとき，ℓとmの値を比べましょう。

図１



皆は，［Sさんの問題］について，いろいろな考え方でℓ とmの値を比べた。

Tさんは，BP＝3 cmとして，ℓ とmの値をそれぞれ求めて比べた。

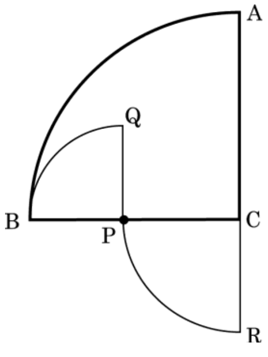
問1．［Sさんの問題］で，Tさんが決めたBP＝3 cmのとき，ℓ とmの値をそれぞれ求めよ。ただし，答えに根号がふくまれるときは，根号をつけたままで表せ。

Uさんは，［Sさんの問題］をもとにして，次の問題をつくった。

［Uさんの問題］

右の**図２**で，おうぎ形CABは，半径が10 cm，中心角が∠ACB＝90° のおうぎ形です。
点Pは，おうぎ形CABの半径BC上にある点で，点B，Cのいずれにも一致しません。
おうぎ形PQBは，半径がBP，中心角が∠QPB＝90° のおうぎ形です。
おうぎ形CPRは，半径がPC，中心角が∠PCR＝90° のおうぎ形です。
$\overset{\frown}{BA}$，$\overset{\frown}{BQ}$，$\overset{\frown}{PR}$が，それぞれ弧BA，弧BQ，弧PRの長さを表すとき，
$\overset{\frown}{BA}$＋AC＝$\overset{\frown}{BQ}$＋QP＋$\overset{\frown}{PR}$＋RCであることを確かめましょう。

図２



問2．［Uさんの問題］で，$\overset{\frown}{BA}$＋AC＝$\overset{\frown}{BQ}$＋QP＋$\overset{\frown}{PR}$＋RCであることを証明せよ。ただし，円周率はπとする。

解答欄

問1	ℓ の値	mの値
問2	証明 $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}+\mathrm{AC}=\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}+\mathrm{QP}+\overset{\frown}{\mathrm{PR}}+\mathrm{RC}$	

【問5】

図のように，ABを直径とする半円と，半円外の点Cがある。ACと半円の交点をD，Aを通りBCに平行な直線と∠ACBの二等分線との交点をE，ECとABの交点をFとする。AD＝4 cm，DC＝2 cm，BC＝3 cmのとき，次の各問いに答えなさい。

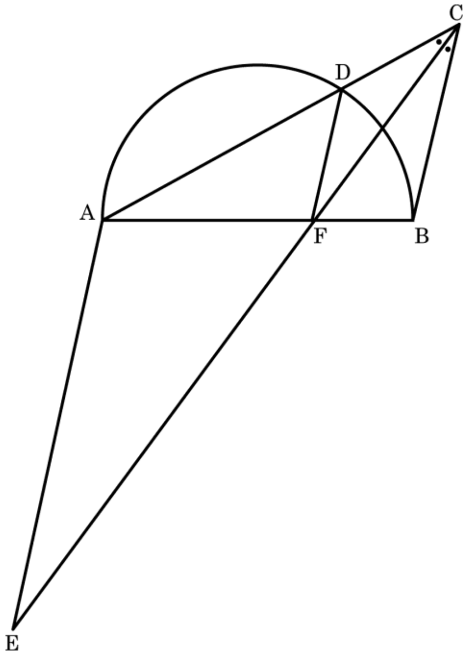
（長野県 2003年度）

⑴ AEの長さを求めなさい。

⑵ DF∥AEを証明しなさい。

⑶ AFの長さを求めなさい。

⑷ △AECの面積を求めなさい。



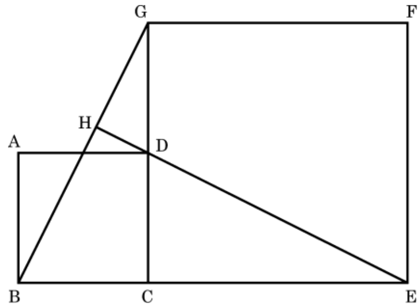
解答欄

⑴	cm
⑵	証明
⑶	cm
⑷	cm^2

【問6】

図のように，四角形ABCDと四角形GCEFはともに正方形で，線分BGと線分EDの延長との交点をHとする。このとき，BG⊥EHであることを，次のように証明した。下の(1)，(2)に答えなさい。

（石川県 2003年度）



証明

△GBCと△EDCにおいて

四角形ABCDと四角形GCEFは正方形だから

BC＝DC

GC＝EC

∠BCG＝∠DCE＝90°

よって，$\boxed{\text{ア　　　　　　}}$ から

△GBC≡△EDC

イ

(1) $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる三角形の合同条件を書きなさい。

(2) $\boxed{\text{イ}}$ の部分には証明の続きが入ります。それを書きなさい。

解答欄

(1)	
(2)	

【問7】

四角形ABCDで，△ABD＝△ACD＝△BCDとなっているとき，この四角形は平行四辺形であることを次のように証明した。空欄に最も適した式を書け。

（愛知県A 2003年度）

(証明)	△ABD＝△ACDだから，AD // BC
	また，△ACD＝△BCDだから，$\boxed{}$
	したがって，2組の向かいあう辺が，それぞれ平行であるので，四角形ABCDは平行四辺形である。

解答欄

【問8】

△ABCで，∠Aの二等分線が辺BCと交わる点をD，DからCAに平行な直線をひき，ABとの交点をEとする。このとき，AE＝DEとなることを次のように証明した。空欄に最も適した式を書け。

（愛知県B　2003年度）

(証明)　仮定より，∠BAD＝∠CAD　…①

DE∥CAだから，$\boxed{}$　…②

①，②から，△EDAで，∠EAD＝∠EDA

したがって，AE＝DE

解答欄

【問9】

図1のように，半径2 cmの円Oの周上に，∠AOB＝90°となる2点A，Bをとり，半径1 cmの円O′が，$\overset{\frown}{AB}$上を，すべることなく反時計回りに回転していく。このとき，2つの円の接点をPとし，点Pは点Aから点Bまで移動するものとする。また，円O′の周上で，回転する前に点Aと重なっていた点をCとし，回転を始めてからできる線分CPの延長と円Oとの交点をQとする。ただし，円O′が回転する前は点Qも点Aに重なっていたものとする。後の⑴～⑷の問いに答えなさい。

（滋賀県 2003年度）

⑴ 次の(ア)，(イ)の $\boxed{}$ 内にあてはまる記号や数を書きなさい。

(ア) $\overset{\frown}{AP}$と $\boxed{①}$ の長さは等しい。

(イ) 点Qは円Oの周上を $\boxed{②}$ °回転する。

⑵ O′C∥OQであることを証明しなさい。

⑶ 図2のように，∠AOP＝65°のとき，∠OQPの大きさを求めなさい。

⑷ △OQPの面積が最大になるとき，線分CQの長さを求めなさい。

図1

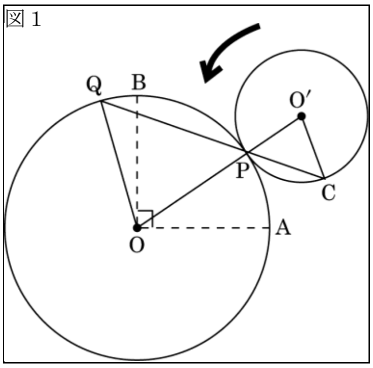
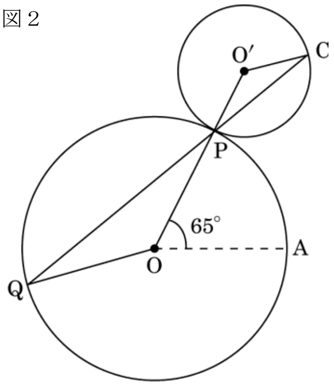


図2



解答欄

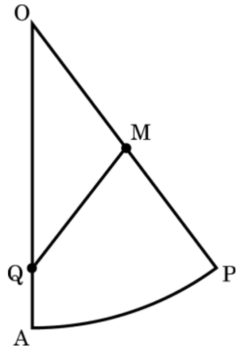
⑴	(ア)	①
	(イ)	②
(2)	証明	
(3)		
(4)	cm	

【問10】

図において，図形OAPは半径が10 cmで中心角∠AOPが鋭角のおうぎ形である。Mは線分OPの中点である。Qは，線分OA上にあってMQ＝MOとなる点のうちOと異なる点である。円周率をπとして，次の問いに答えなさい。

（大阪府 後期 2003年度）

(1) 中心角∠AOPの大きさが60°であるときの線分QAの長さを求めなさい。



(2) 下の □ の【証明】は，次の □ の中のことがらを中心角∠AOPの大きさをa°として証明したものである。証明中の ㋐ ～ ㋒ のそれぞれに入れるのに適している角の大きさをaを用いて表しなさい。

> 中心角∠AOPの大きさが何度であっても，PとQとを結んでできる△OQPの
> 内角∠OQPの大きさは90°である。

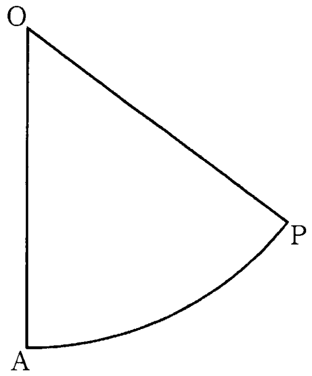
【証明】

中心角∠AOPの大きさをa°とする。
△MOQはMQ＝MOの二等辺三角形だから ∠MQO＝∠MOQ
∠AOP＝a° だから ∠MQO＝a° …①
よって ∠QMP＝ ㋐ °
三角形の内角の和は180°だから ∠MQP＋∠MPQ＝ ㋑ °
Mは線分OPの中点であり，また，MQ＝MOだから，△MQPはMQ＝MPの二等辺三角形となり ∠MQP＝∠MPQ
よって ∠MQP＝ ㋒ ° …②
①，②より ∠OQP＝∠MQO＋∠MQP＝90°

(3) おうぎ形OAPが解答欄に示した図形であるとき，点Qを定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように，作図に用いた線は残しておくこと。

(4) 2点P，Q間の距離が6 cmのとき，PとQとを結んでできる△OQPをOAを軸として1回転させてできる円すいの側面積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm					
(2)	㋐		㋑		㋒	
(3)						
(4)	cm^2					

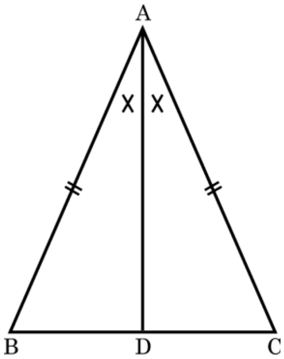
【問11】

次の①では指示に従って答え，②では $\boxed{}$ に適当な数を書き入れなさい。

（岡山県　2003年度）

①　図1のように，AB＝ACの二等辺三角形ABCがあり，∠BACの二等分線と辺BCとの交点をDとする。このとき，ADは辺BCを垂直に2等分することを証明しなさい。

図1

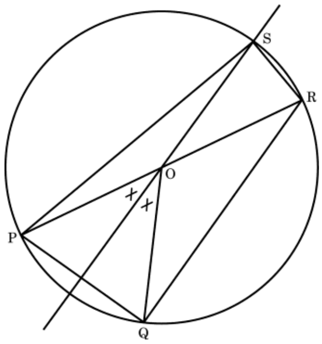


②　図2のように，半径2 cmの円Oの円周上にある3点P，Q，Rを頂点とする△PQRがある。ここで，PQ＝2 cmであり，PRは円Oの直径である。点Oと点Qを結び，∠POQの二等分線と円Oとの交点のうち，点Rに近い方の点をSとし，点Sと点P，点Sと点Rをそれぞれ結ぶ。このとき，

QR＝ (ア) cm，∠RPS＝ (イ) °であり，円周の長さの $\frac{1}{2}$ より短い弧 $\overset{\frown}{RS}$ の長さは (ウ) cmである。

また，四角形PQRSの面積は (エ) cm^2 である。

図2



解答欄

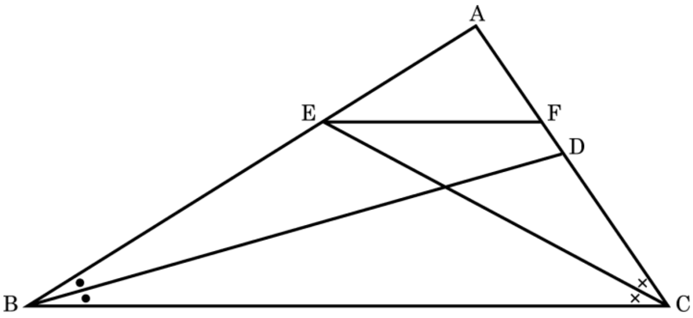
<table>
<tr><td>①</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td rowspan="4">②</td><td>(ア)</td><td></td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(ウ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(エ)</td><td></td></tr>
</table>

【問12】

図のように，△ABCにおいて，∠B，∠Cの二等分線と辺AC，ABの交点をそれぞれD，E，また，点Eを通り，辺BCに平行な直線と辺ACとの交点をFとする。ただし，AB＞ACとする。次の⑴～⑶の問いに答えなさい。

（大分県　2003年度）

⑴　△FECが二等辺三角形であることを証明しなさい。



⑵　AF＝4 cm，BC＝15 cmのとき，線分EFの長さを求めなさい。

⑶　AF＝5 cm，FD：DC＝1：5であり，また，線分EBがFCより6 cm長いとき，線分AEの長さを求めなさい。

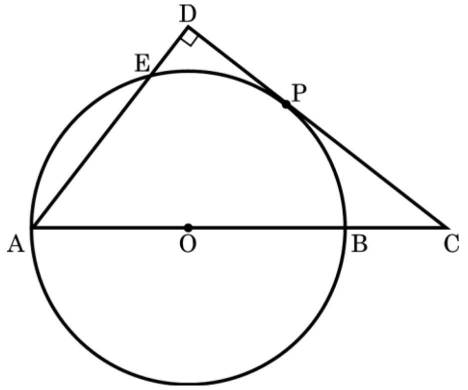
解答欄

(1)	証明
(2)	cm
(3)	cm

【問13】

図は，ABを直径とする円Oの周上に点Pを，∠BOPが鋭角になるようにとり，点Pにおける円Oの接線とABの延長との交点をCとし，点Aから直線CPに垂線をひき，直線CPとの交点をD，直線ADと円Oとの交点をEとしたものである。このとき，次の1～3の問いに答えなさい。

（鹿児島県　2003年度）



1．点D以外の6つの点O，A，B，C，E，Pのうち，3つの点を適当にとり三角形をつくるとき直角三角形となるものを1つあげよ。

2．∠OAP＝∠EAPであることを証明せよ。

3．円Oの半径を2　cm，BCの長さを1　cmとするとき次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1)　線分ADの長さは何cmか。

(2)　四角形DEOPの面積は何cm^2か。

解答欄

1		
2	証明	
3	(1)	cm
	(2)	cm^2