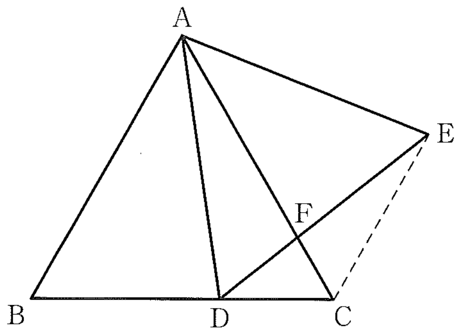
3－8. 平面図形　合同の証明　複合問題ほか　2011年度出題

【問1】

図のように，正三角形ABCの辺BC上に点Dをとり，ADを1辺とする正三角形ADEをつくる。また，辺DEと辺ACの交点をFとする。次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県　後期　2011年度）



(1)　△ABDと△ACEが合同になることを次のように証明した。$\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{え}}$ にあてはまる式やことばや角を入れなさい。

〔証明〕
△ABDと△ACEで
△ABCは正三角形だから
$\boxed{\quad\text{あ}\quad}$ …①
同様に，△ADEは正三角形だから
AD＝AE　…②
また，△ABC，△ADEは正三角形だから
$\boxed{\quad\text{い}\quad}$ ＝60°
∠BAD＝60°－ $\boxed{\quad\text{う}\quad}$ …③
∠CAE＝60°－ $\boxed{\quad\text{う}\quad}$ …④
③，④から
∠BAD＝∠CAE　…⑤
①，②，⑤から，$\boxed{\quad\text{え}\quad}$ が等しいので
△ABD≡△ACE

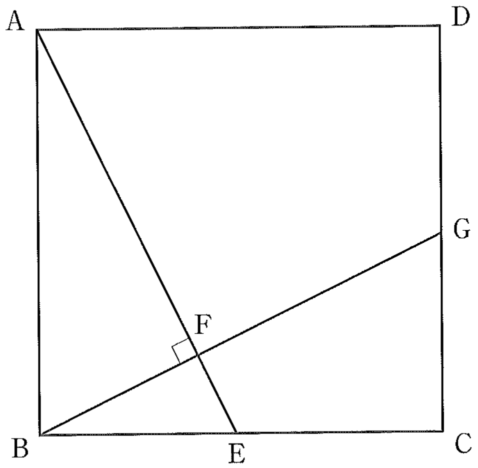
(2)　AB＝6 cm，DC＝2 cmのとき，CFの長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="4">(1)</td><td>ⓐ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓘ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓤ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓔ</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

【問2】

図のように，正方形ABCDの辺BC上にBと異なる点Eをとります。Bから線分AEに垂線BFをひき，BFの延長と辺CDとの交点をGとします。



このとき，△ABE≡△BCGであることを証明しなさい。

（岩手県　2011年度）

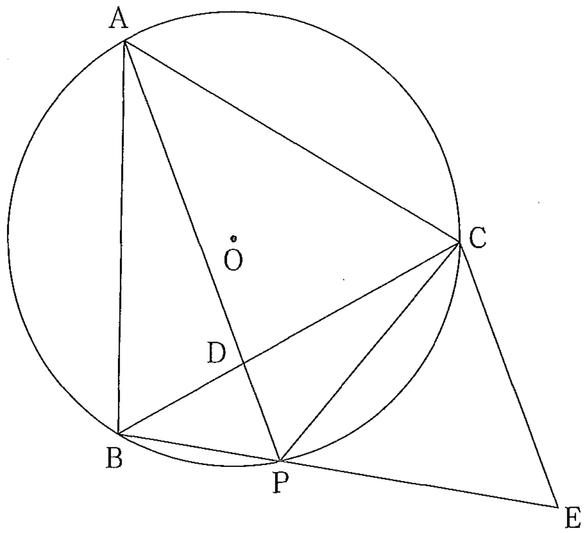
解答欄

〔証明〕

【問3】

図のように，点Oを中心とする円の周上に3点A，B，Cがあり，AB＝BC＝CAである。点Aをふくむ弧BCを除いた円周上に点Pをとり，線分APと線分BCとの交点をD，点Cを通り線分APに平行な直線と直線BPとの交点をEとする。このとき，あとの問いに答えなさい。

（山形県　2011年度）



問1　∠PCE＝60°であることを次のように証明したい。$\boxed{\text{a}}$，$\boxed{\text{b}}$ にあてはまる語を，あとのア～オから1つずつ選び，記号で答えなさい。

〔証明〕
仮定より，△ABCは正三角形だから，∠ABC＝60° … ①
弧ACに対する $\boxed{\text{a}}$ は等しいから，∠ABC＝∠APC … ②
また，AP // CEで，$\boxed{\text{b}}$ は等しいから，∠APC＝∠PCE … ③
①，②，③より，∠PCE＝60°

ア　同位角
イ　錯角
ウ　対頂角
エ　円周角
オ　中心角

問2　△APCと△BECが合同であることを証明しなさい。なお，∠PCE＝60°であることは使ってよい。

問3　AP＝25 cm，BP＝10 cmであるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　PDの長さを求めなさい。

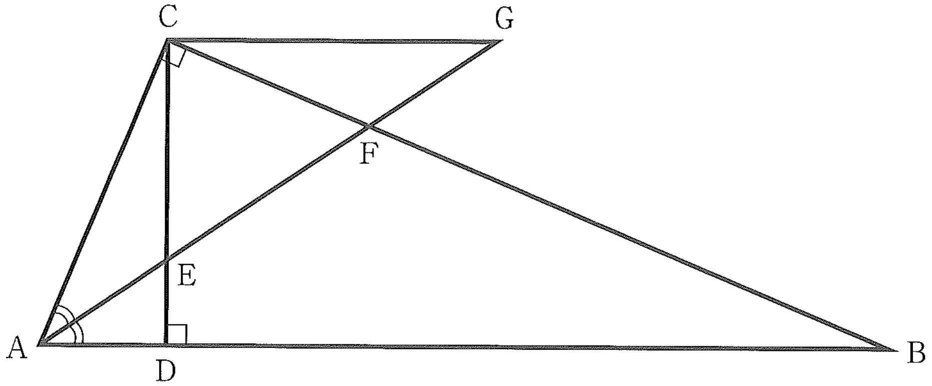
(2)　△ABCと△PECの面積の比を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>a</td><td></td><td>b</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="4">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td colspan="3">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="3">:</td></tr>
</table>

【問4】

図のように，∠ACB＝90°の直角三角形ABCがある。点Cから辺ABに垂線をひき，辺ABとの交点をDとする。また，∠BACの二等分線をひき，線分CD，辺BCとの交点をそれぞれE，Fとする。さらに，線分AFの延長上に点GをAE＝FGとなるようにとる。



このとき，△ACE≡△GCFであることを次のように証明した。

〔証明〕
△ADEと△ACFで，
仮定から，∠ADE＝∠ACF …①
線分AFは∠BACの二等分線だから，
　　∠DAE＝∠CAF …②
①，②から，$\boxed{\text{ア}}$ ので
　　△ADE∽△ACF
対応する角だから，∠AED＝∠AFC …③
$\boxed{\text{イ}}$ だから，∠AED＝∠CEF …④

$\boxed{\text{ウ}}$

次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2011年度）

問1 $\boxed{\text{ア}}$ には当てはまる三角形の相似条件を，$\boxed{\text{イ}}$ には当てはまる適切なことばをそれぞれ書きなさい。

問2 $\boxed{\text{ウ}}$ には証明の続きを書き，△ACE≡△GCFであることの証明を完成させなさい。ただし，〔証明〕の中の①，②，③，④で示されている関係を使う場合は，①，②，③，④の番号を用いてもよい。また，新たな関係に番号をつける場合は，⑤以降の番号を用いなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	

【問5】

鋭角の∠XAYがあります。右の図1のように，線分AY上に点Bをとり，線分ABを直径とする半円Oをかき，線分AXとの交点をCとします。線分AYをAのほうへ延長した線上にOA＝ADとなる点Dをとります。図2のように，線分CX上に点Pをとり，この点Pから$\overset{\frown}{CB}$と接するように接線をひき，$\overset{\frown}{CB}$との接点をE，線分AYとの交点をFとしたとき，∠DPF＝90°となりました。点Aから線分PFへ垂線をひいたときの，$\overset{\frown}{CB}$，線分PFとの交点をそれぞれG，Hとします。

図1

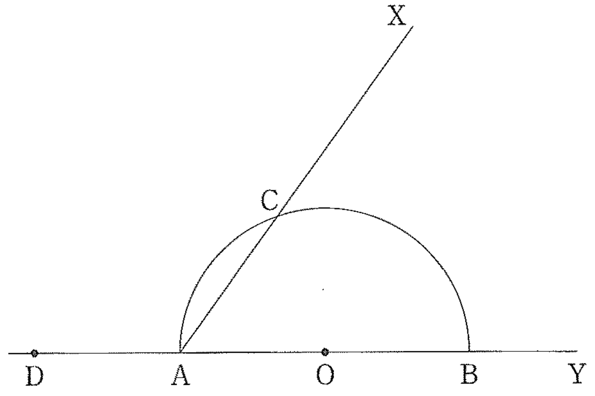
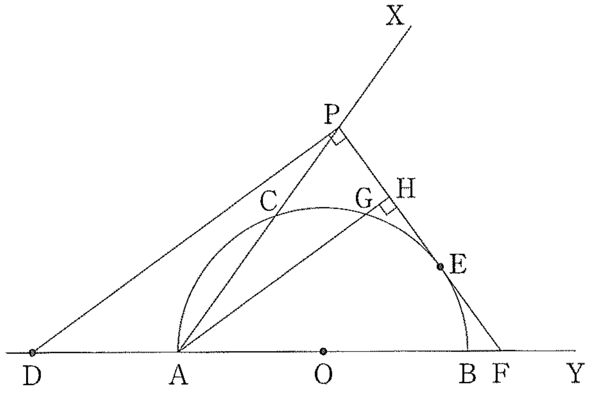


図2



このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県 後期 2011年度）

問1 △HAPと△HAEが合同であることを証明しなさい。

問2 $\overset{\frown}{CE}$と$\overset{\frown}{EB}$の長さの比を求めなさい。

問3 OA＝5 cm，AG＝8 cmのとき，四角形GABEの面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}:\overset{\frown}{\mathrm{EB}}=$ 　　　：
問3	cm^2

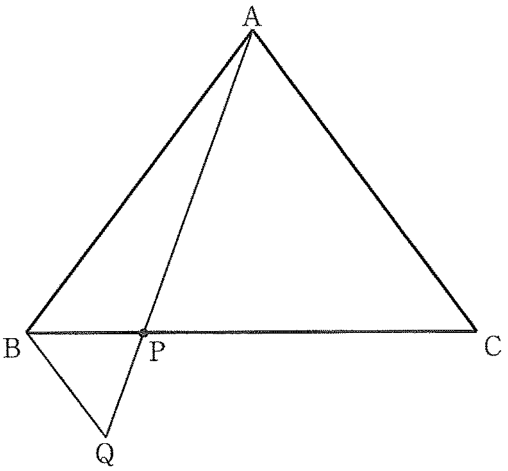
【問6】

図1で，△ABCはAB＝AC，∠BACが鋭角の二等辺三角形である。点Pは，辺BC上にある点で，頂点B，頂点Cのいずれにも一致しない。頂点Aと点Pを結び，線分APをPの方向に延ばした直線と，頂点Bを通り辺ACに平行な直線との交点をQとする。次の各問に答えよ。

（東京都　2011年度）

問1　図1において，∠BAC＝70°，△ABPの内角である∠BAPの大きさをa°とするとき，△BQPの内角である∠BPQの大きさをaを用いた式で表せ。

図1

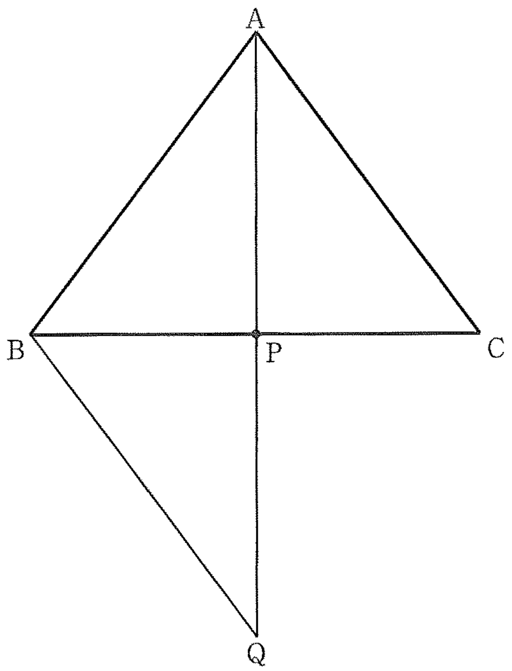


問2　図2は，図1において，BP＝CPの場合を表している。
次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　△APC≡△QPBであることを証明せよ。

(2)　図2において，点Pを通り辺ABに平行な直線を引き，辺ACとの交点をRとし，頂点Bと点Rを結んだ線分と，線分APとの交点をSとした場合を考える。AB＝5 cm，BC＝6 cmのとき，△SBQの面積は何cm^2か。

図2



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">(　　　　　　　　　　　　　　　)　度</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>〔証明〕
△APCと△QPBにおいて,

△APC≡△QPB</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

【問7】

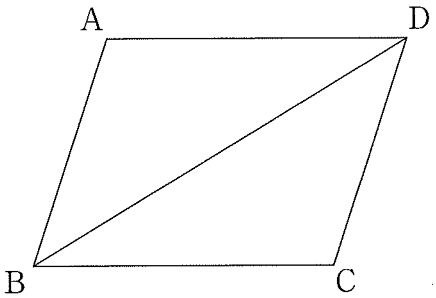
明子さんと直樹さんは，平行四辺形ABCDについて調べた。このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（山梨県　2011年度）

問1　2人は，図1のように，点BとDを結んで対角線をひいた。

△ABD≡△CDBとなることを証明しなさい。

図1



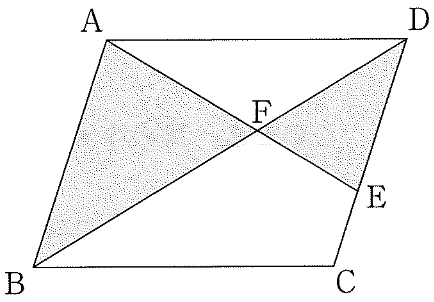
問2　明子さんは，図2のように，辺CD上に，CE：ED＝1：2となる点Eをとり，線分AEと対角線BDの交点をFとした。このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　明子さんは，△FAB∽△FEDであることが証明できた。

△FABと△FEDの面積の比を求めなさい。

(2)　次に，△FABの面積をSとしたとき，△FDA，四角形FBCEの面積を，それぞれどのように表すことができるか考えた。△FDA，四角形FBCEの面積を，それぞれSを使って表しなさい。

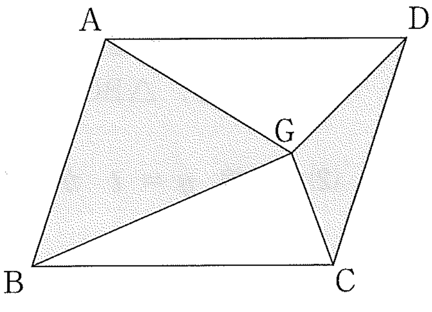
図2



問3　直樹さんは，図3のように，平行四辺形ABCDの内部にあって辺上にない点Gをとって三角形を作ったとき，次の予想を立てた。

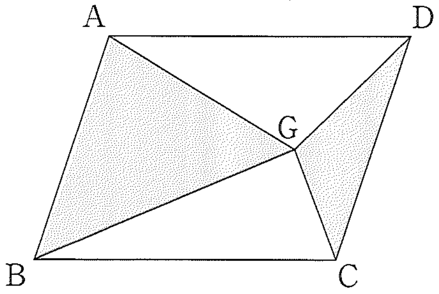
【直樹さんの予想】 点Gをどこにとっても，△GABと△GCDの面積の和は，△GDAと△GBCの面積の和に等しい。

図3



【直樹さんの予想】が正しい理由を説明しなさい。ただし，説明に必要となる点や線分などは，解答用紙の図にかき入れること。

解答欄

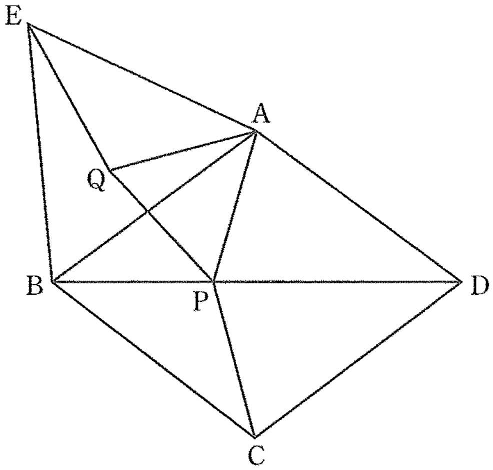
<table>
<tr><td rowspan="1">問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>:</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>△FDA＝　　　　　　　, 四角形FBCE＝</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">(説明に必要となる点や線分などは, 図にかき入れること。)

</td></tr>
</table>

【問8】

1辺の長さが5 cmのひし形ABCDがあり，対角線BD＝8 cmである。図1のように，辺ABを1辺とする正三角形EBAをつくる。さらに，点Pを線分BD上にとって，PAを1辺とする正三角形QPAをつくり，点EとQ，点PとCを直線で結ぶ。ただし，点Pは，点B，Dとは異なる位置にあり，点Qは直線PAについて点Eと同じ側にあるものとする。次の各問いに答えなさい。

（長野県 2011年度）

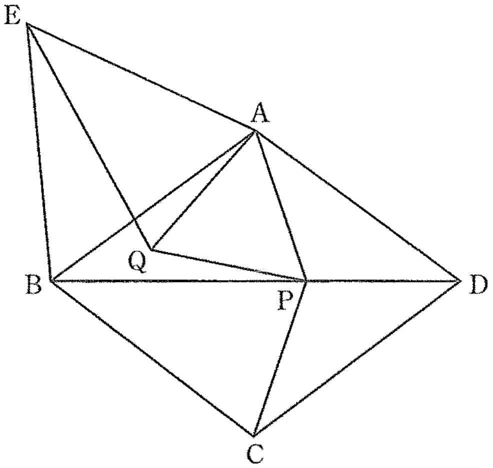
図1



問1 点AとCを結んだ線分ACの長さを求めなさい。

問2 図2のように，点Qが，線分AB上になく，直線ABについて点Cと同じ側にあるとき，△AEQ≡△ABPを証明しなさい。

図2



問3 点Pを，∠BAP＝90°となるようにとるとき，△AEQの面積を求めなさい。

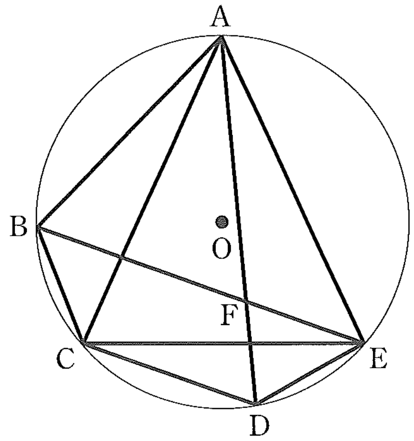
問4 点Pを，EQ＋QP＋PCの長さが最小になるようにとるとき，EQ＋QP＋PCの長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	
問3	cm^2
問4	cm

【問9】

図で，5点A，B，C，D，Eは円Oの円周上の点である。△ACEはAC＝AEの二等辺三角形であり，BE // CDである。また，線分ADとBEとの交点をFとする。



次の問1，問2に答えなさい。

（岐阜県　2011年度）

問1　△ABC≡△AFEを証明しなさい。

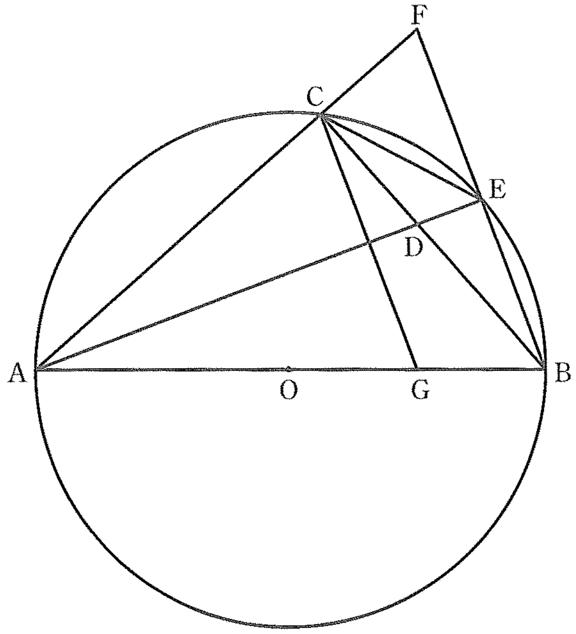
問2　AB＝6 cm，BC＝4 cm，∠ABC＝120°のとき，四角形BCDEの面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm^2

【問10】

図のように，線分ABを直径とする円Oの円周上に点Cをとり，△ABCをつくる。∠CABの二等分線と線分BC，円Oとの交点をそれぞれD，Eとする。線分BEを延長した直線と線分ACを延長した直線の交点をFとする。点Cを通り，線分BEに平行な直線と線分ABの交点をGとする。



このとき，あとの問いに答えなさい。ただし，点Eは点Aと異なる点とする。

（三重県　2011年度）

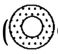
問い　△ABE≡△AFEであることの証明を，次の $\boxed{（ア）}$ ～ $\boxed{（ウ）}$ のそれぞれにあてはまる適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〔証　明〕
△ABEと△AFEにおいて，
共通だから，
AE ＝AE …①
線分AEは∠CABの二等分線だから，
$\boxed{（ア）}$ ＝∠FAE …②
∠AEBは半円の弧に対する円周角だから，
∠AEB ＝ $\boxed{（イ）}$ °…③
3点B，E，Fは一直線上にあるから，∠BEF ＝180° …④
③，④より，
∠AEF ＝ $\boxed{（イ）}$ °…⑤
③，⑤より，
∠AEB ＝ ∠AEF …⑥
①，②，⑥より，
$\boxed{（ウ）}$ がそれぞれ等しいので，
△ABE ≡△AFE

解答欄

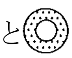
問1	（ア）	
	（イ）	
	（ウ）	

【問11】

ABが直径で，点Oを中心とする半径5 cmの円をMとし，点Pが円Mの上側の弧AB上を図1，図2，図3のようにAからBまで移動する。弦AP上にAP⊥OTとなる点Tをとり，点Oを中心とする半径OTの円をNとすると，2つの円で囲まれた図形 (の部分) ができる。後の問1～問4に答えなさい。

（滋賀県　2011年度）

問1　△OATの面積が5 cm^2であるとき，△BAPの面積を求めなさい。

問2　円Nの面積との部分の面積が等しくなるとき，∠APOの大きさを求めなさい。

問3　図2において，△OAT≡△OPTを証明しなさい。

問4　∠AOQ＝90°となる点Qを円Mの下側の弧AB上にとる。図3のように，点PがBに近づいてPQ＝8 cmになったとき，円Nの半径は何cmか。求めなさい。

図1

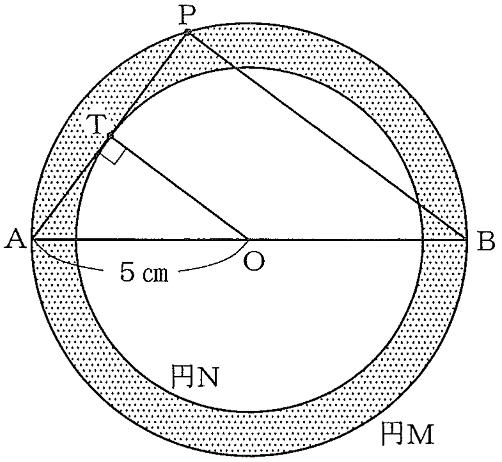


図2

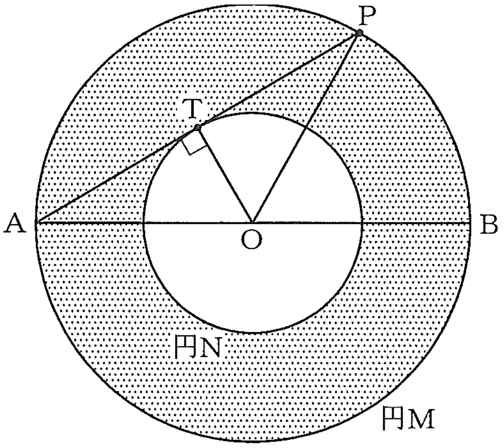
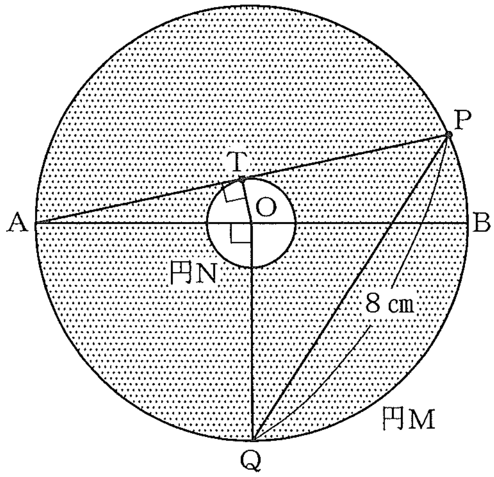


図3



解答欄

問1	cm^2
問2	度
問3	〔証明〕
問4	cm

【問12】

図1において，四角形ABCDはAB＝6 cm，AD＝11 cmの長方形である。Iは，辺ABの中点である。Pは，長方形ABCDの内部の点であって，Iを通り辺ABに垂直な直線上にあり，PI＝2 cmである。このとき，AD // IPである。線分PJと四角形EFGHとは，それぞれ線分PIと長方形ABCDとを点Pを中心として同じ向きに同じ角度だけ回転させたものである。このとき，PI＝PJ，長方形ABCD≡長方形EFGHである。Gは，直線EHについてAと反対側にあって，直線ADについてCと反対側にある。K，L，M，Nは，それぞれ辺ABと辺EH，辺ABと辺EF，辺BCと辺EF，辺ADと辺FGとの交点である。このとき，Pは直線LN上にある。次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 後期 2011年度）

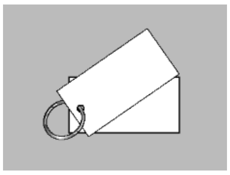
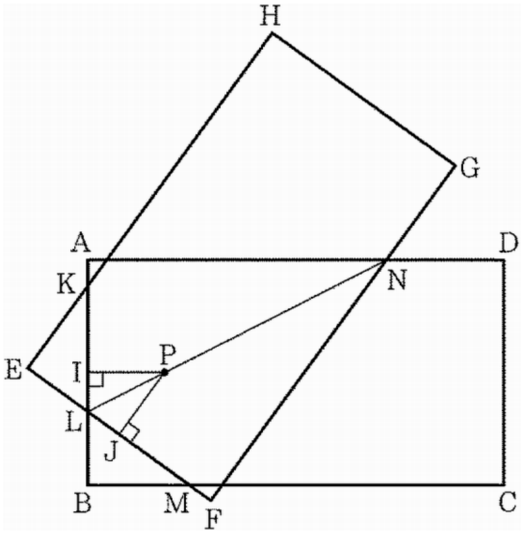


図1



問1 PとCとを結んでできる線分PCの長さを求めなさい。

問2 次の【証明】は，まず，△PIL≡△PJLであることを証明してから，IL＝JLであることを示し，その後，IL＝JLであることを用いて△KEL≡△MBLであることを証明したものである。次の【証 明】におけるⓐ〔 〕から適しているものを一つ選び，記号を書きなさい。また，【証明】における $\boxed{ⓑ}$ の部分に△KEL≡△MBLであることの証明を書き加え，【証明】を完成させなさい。

【証 明】
△PILと△PJLにおいて
PL＝PL (共通) …㋐
PI＝PJ (仮定) …㋑
∠PIL＝∠PJL＝90° (仮定) …㋒
㋐，㋑，㋒より，
ⓐ〔 ア 直角三角形の斜辺と他の1辺 イ 直角三角形の斜辺と一つの鋭角 ウ 2辺とその間の角 〕
がそれぞれ等しいから
△PIL≡△PJL
よって IL＝JL

$\boxed{ⓑ}$

問3 EL＝2 cmであるときの線分ANの長さを求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>ⓐ</td><td></td></tr>
<tr><td>ⓑ</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">〔求め方〕

cm</td></tr>
</table>

【問13】

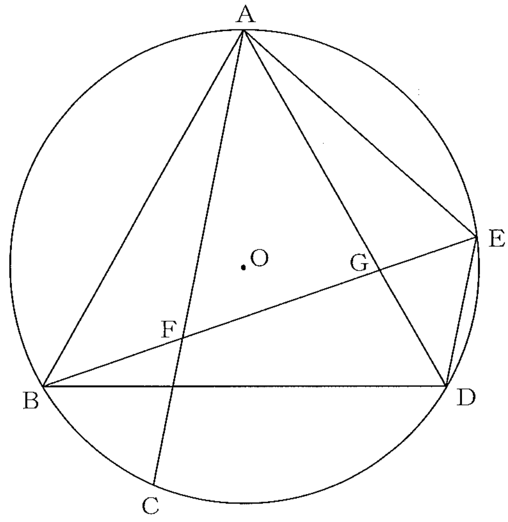
図で，5点A，B，C，D，Eは円Oの周上の点である。AB＝BD＝DAであり，$\overset{\frown}{BC}$と$\overset{\frown}{DE}$の長さは等しい。また，線分BEと線分AC，ADとの交点をそれぞれF，Gとする。各問いに答えよ。

（奈良県　2011年度）

問1　△ABF≡△ADEであることを証明せよ。

問2　∠DBE＝a°とするとき，∠AGEの大きさをaを用いて表せ。

問3　AB＝6 cm，∠ABE＝45°のとき，線分AEと線分DEの長さの和を求めよ。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	
問3	cm

【問14】

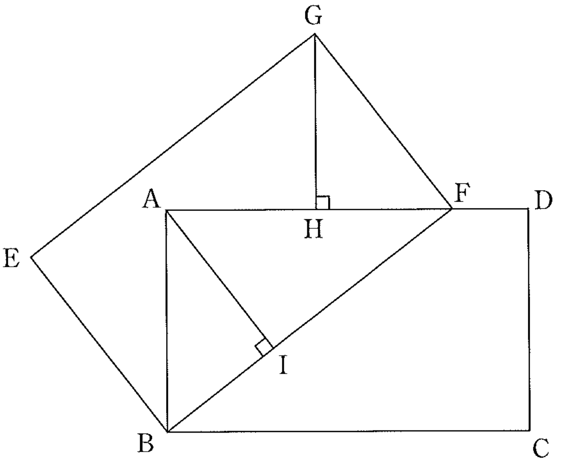
長方形ABCDと，その長方形を点Bを中心として反時計回りに回転させてできる合同な長方形EBFGを考える。ただし，その長方形ABCDは辺BCが辺ABよりも長いものとする。次の問1～問3に答えなさい。

（島根県　2011年度）

問1　図1のように，点Fが辺AD上にあるときを考える。

辺AD上に点Hを，辺BF上に点Iを，それぞれGH⊥AD，AI⊥BFとなるようにとる。このとき，△ABI≡△GFHであることを証明しなさい。

図1



問2　図2のように，辺BF上に点JをAJ⊥BFとなるようにとる。さらに，図3のように，AB＝3 cm，∠CBF＝60°とし，辺AB上に点KをJK⊥ABとなるようにとる。このとき，JKの長さを求めなさい。

図2

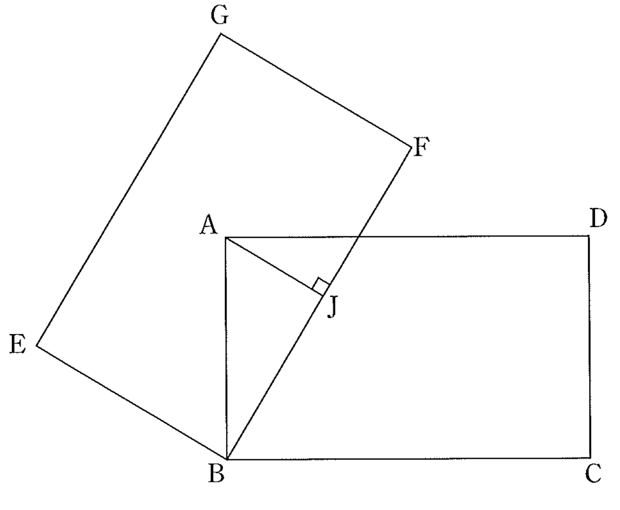
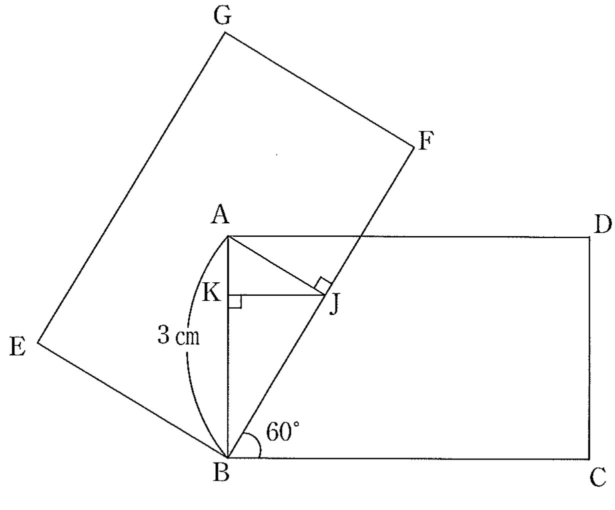
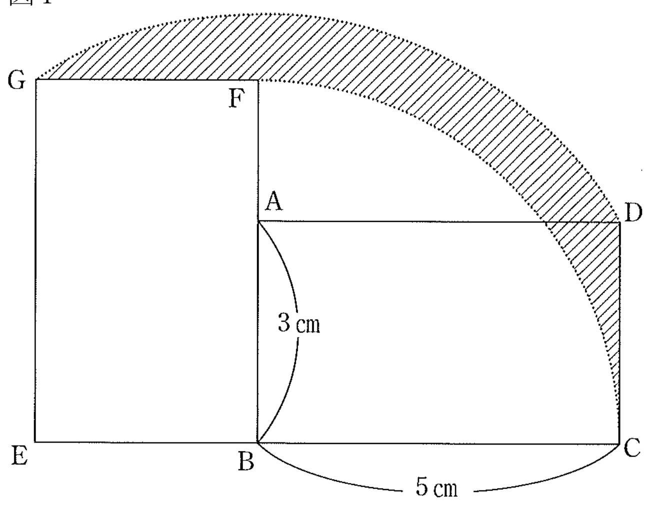


図3



問3　図4の長方形EBFGは，長方形ABCDを点Bを中心として反時計回りに90°回転させてできたものである。AB＝3 cm，BC＝5 cmのとき，線分CDが通過してできる部分（図4の斜線部分）の面積を求めなさい。

図4



解答欄

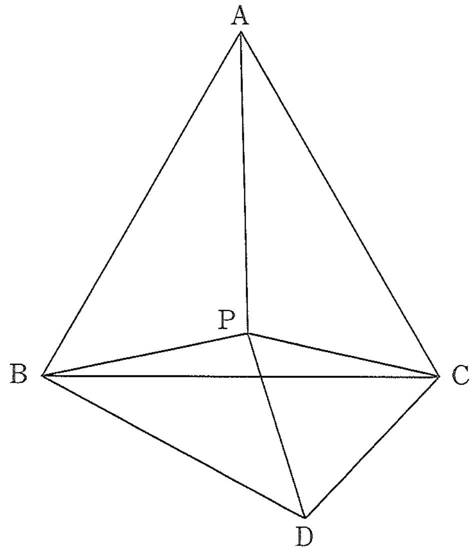
問1	〔証明〕
問2	cm
問3	cm^2

【問15】

図のように，正三角形ABCの内部に点Pをとり，線分CPを1辺とする正三角形CPDを辺PDが辺BCと交わるようにつくる。点Aと点P，点Bと点D，点Bと点Pをそれぞれ結ぶ。このとき，次の問1，問2では指示に従って答え，問3ではに適当な数を書き入れなさい。

（岡山県　2011年度）

問1　△APC≡△BDC　を証明しなさい。



問2　$PB^2+PC^2=PA^2$が成り立つとき，∠BPD＝90°であることを次のように証明した。$\boxed{\quad}$ に当てはまる最も適当な記号または式は，次の(1)～(7)のうちではどれですか。

証明
△APC ≡ △BDCなので
PA＝ $\boxed{（ア）}$ …［Ｉ］
△CPDは正三角形なので
PC＝ $\boxed{（イ）}$ …［Ⅱ］
［Ｉ］，［Ⅱ］と$PB^2+PC^2=PA^2$から，
$\boxed{（ウ）}$
したがって，三平方の定理の逆から，
∠BPD＝90°

(1)　BC
(2)　PD
(3)　DB
(4)　BA
(5)　$PB^2=PD^2+DB^2$
(6)　$PB^2+PD^2=DB^2$
(7)　$PB^2+BA^2=PA^2$

問3　$PB^2+PC^2=PA^2$が成り立ち，さらにPB＝PC＝2 cmであるとき，PA＝ $\boxed{（エ）}$ cm，∠DCB＝$\boxed{（オ）}$ °であり，BC＝ $\boxed{（カ）}$ cmである。

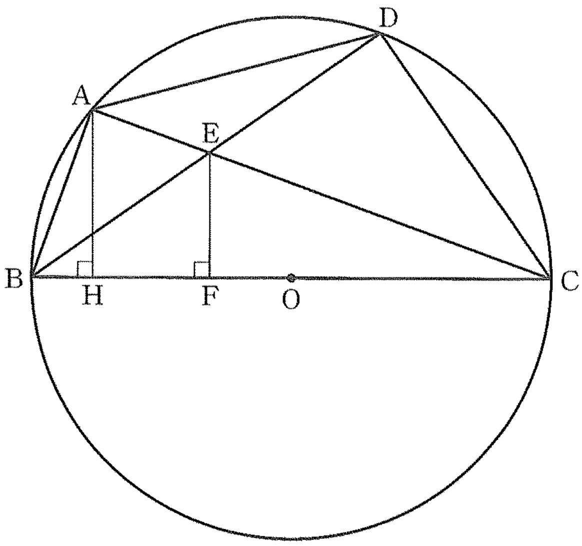
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(ア)</td><td></td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(ウ)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問3</td><td>(エ)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(オ)</td><td>°</td></tr>
<tr><td>(カ)</td><td>cm</td></tr>
</table>

【問16】

図のように，円Oの周上に4点A，B，C，Dがあり，AD＝CDとする。また，線分ACと線分BDの交点をEとし，２点A，Eから線分BCにひいた垂線と線分BCとの交点をそれぞれH，Fとする。このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（佐賀県 後期 2011年度）



問1 ∠BACの大きさを求めなさい。

問2 △ABE≡△FBEであることを証明しなさい。

問3 AB＝$3\sqrt{2}$ cm，AC＝12 cm，BH＝$\sqrt{2}$ cmとする。
このとき，次の(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1) AHの長さを求めなさい。

(2) AEの長さを求めなさい。

(3) 四角形ABCDの面積は，△ABEの面積の何倍か，求めなさい。

解答欄

問1	度	
問2		
問3	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	倍

【問17】

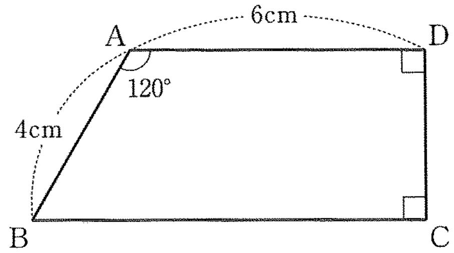
図1のように，AD // BCの台形ABCDがある。AB＝4 cm，AD＝6 cm，∠BAD＝120°，∠BCD＝∠ADC＝90°のとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2011年度）

問1　∠ABCの大きさは何度か。

問2　辺BCの長さは何cmか。

図1



問3　図2のように，図1の台形ABCDを頂点Bが頂点Dに重なるように折り返すと，折り目は辺AD上の点Pと辺BC上の点Qとを結ぶ線分PQとなった。この折り返しをもとにもどして，図3のように線分BDと線分PQとの交点をOとする。このとき，次の(1)～(3)に答えよ。

図2

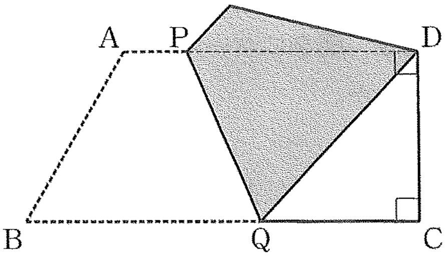
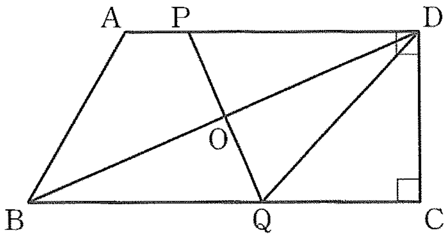


図3

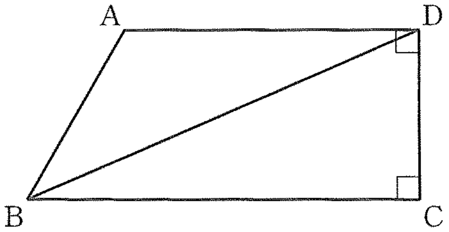


(1)　直線PQを定規とコンパスを用いて解答用紙の図に作図せよ。ただし，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

(2)　△ODP≡△OBQであることを証明せよ。

(3)　三角形DPQの面積は何cm^2か。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">∠ABC＝　　　　　°</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">　　　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問3</td><td>(1)</td><td>図

</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td></td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>　　　　　　　　cm^2</td></tr>
</table>

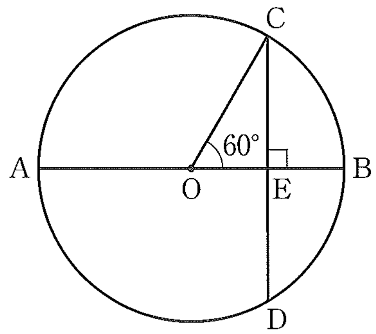
【問18】

図1のように，線分ABを直径とする円Oがある。この円周上に点Cをとり，弦CDは点Eで直径ABと垂直に交わっている。AB＝8 cm，∠COB＝60° とするとき，次の問1～問3に答えなさい。

（宮崎県　2011年度）

問1　図1において，弦AC，BCをひく。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

図1

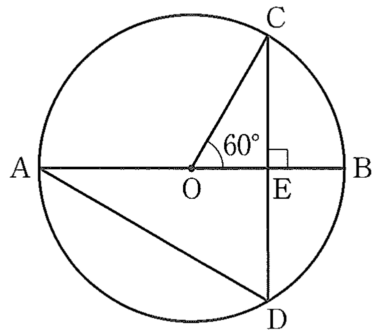


(1)　∠CABの大きさを求めなさい。

(2)　△COE≡△CBEであることを証明しなさい。

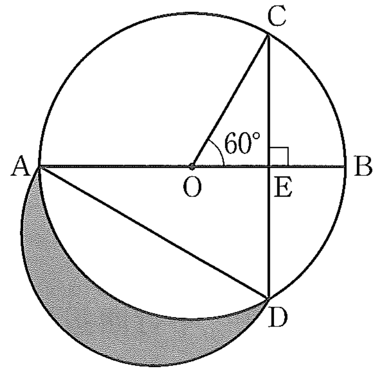
問2　図2は，図1において，弦ADをひいたものである。このとき，弦ADの長さを求めなさい。

図2



問3　図3は，図2において，弦ADを直径とする半円をかいたものである。このとき，色をつけた部分（　）の面積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。

図3



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(1)</td><td>∠CAB＝　　　　　　度</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔証明〕</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>